TEC | Tecnológico de Costa Rica

GANDRĒOLIVA

FÍSICA GENERAL I

ENERGÍA

André Oliva, BSc
Instituto Tecnológico de Costa Rica

1 Trabajo y energía cinética

1.1 Integrales indefinidas

Una integral indefinida de una función $x(t)$ es lo contrario de una derivada (también se llama una *antiderivada*). Se escribe como

$$\int x(t)dt$$

y se lee "la integral de x respecto a t". Lo que decimos es que si una función v es la derivada dx/dt, eso significa que x es la integral de v: $x(t) = \int v(t)dt$.

Integral de una función potencial

Sabemos que, para la función $x(t) = t^n$,

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$$

entonces, por la definición de integral, sabemos que

$$\int nt^{n-1}dt = t^n$$

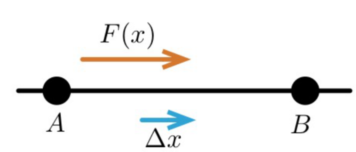
Sea $N = n - 1$. Entonces, $n = N + 1$. Con esto, decimos que

$$\int (N+1)t^N dt = t^{N+1}$$

al igual que con una derivada, las constantes se sacan de las integrales. Sacando la constante $N + 1$ y mandándola a dividir, obtenemos:

$$\int t^N dt = \frac{t^{N+1}}{N+1}$$

1.2 Trabajo unidimensional



El **trabajo** es una cantidad física de *energía*, un concepto que iremos definiendo poco a poco. En una dimensión, el trabajo que hace una fuerza que mueve un objeto desde A hasta B es

$$W_{AB} = \int_A^B F(x)dx$$

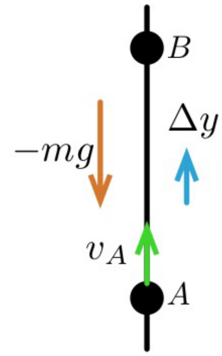
El trabajo es un escalar. Puede ser > 0, < 0 o $= 0$. Definimos que el trabajo sea positivo si al fuerza va en la misma dirección del movimiento, y que sea negativo si la fuerza va en dirección contraria al movimiento. $\mathcal{U}[W] =$ J: Joules, $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$.

Ejemplo 1.1. *Fuerza constante.*

Para una fuerza constante $F(x) = F_0 : const$, el trabajo para mover un cuerpo desde una posición x_A hasta otra posición x_B es

$$W_{AB} = \int_A^B F_0 dx = F_0 \int_A^B dx = F_0(x_B - x_A)$$

Si la fuerza fuera $F = 8\,\mathrm{N}$ empujando a un cuerpo por un tramo de $\Delta x = 3\,\mathrm{m}$, el trabajo sería de $W = 24\,\mathrm{J}$.



Ejemplo 1.2. *Trabajo de la gravedad..*

Calculemos el trabajo que hace la gravedad cuando una bola de masa m sube desde una altura 0 hasta una altura h. Como la gravedad, $-mg$, es una fuerza constante,

$$W_{mg;h,0} = -mg(h - 0) = -mgh$$

Negativa porque la fuerza y el desplazamiento van en direcciones opuestas.

Ejemplo 1.3. .

Trabajo de un resorte. Ahora, calculemos el trabajo que hace un resorte estirado de constante k cuando mueve una caja de masa m por una superficie sin fricción desde una posición x_1 hasta una posición x_2 cualquiera. El trabajo sería

$$W_{\text{resorte};1,2} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

Si un cuerpo no se mueve, no hay trabajo. Cansarse no es lo mismo que hacer trabajo. Si sostenemos una pesada bola de metal por 20 minutos nos cansamos, y usamos energía del cuerpo, pero no realizamos trabajo según nuestra definición.

Si hay varias fuerzas, podemos calcular el **trabajo neto**, que consiste en una suma de los trabajos:

$$W_{net,AB} = W_{F_1;AB} + W_{F_2;AB} + W_{F_3;AB} + ... = \int_A^B F_1 dx + \int_A^B F_2 dx + \int_A^B F_3 dx + ...$$

1.3 Energía cinética

Sabemos que $F = ma = mdv/dt$, y que $v = dx/dt \implies dx = vdt$. Sustituimos en nuestra definición del trabajo:

$$W_{AB} = \int_A^B m\frac{dv}{dt} v dt = \frac{1}{2}mv^2\bigg|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Llamamos a la cantidad

$$\frac{1}{2}mv^2 = K$$

energía cinética. $\mathcal{U}[K] = \text{J}; \mathcal{U}[mv^2/2] = \text{kg m}^2\text{s}^{-2} = \text{J}$. Nuestra definición de energía cinética se relaciona con el trabajo con

$$W_{AB} = K_B - K_A$$

y esto se llama *teorema de trabajo y energía cinética*. Este teorema solo se puede aplicar si W_{AB} es el trabajo neto. Nótese que si el cambio de rapidez es cero, el trabajo neto también lo es: si hay movimiento con rapidez constante el trabajo neto es cero.

Ejemplo 1.4. *Altura de un movimiento en caída libre.*

. Quisiéramos determinar la altura máxima de un cuerpo en caída libre lanzado verticalmente desde A con una velocidad v_A, utilizando solamente consideraciones de energía. Utilizamos el teorema de trabajo y energía cinética con el trabajo de la gravedad:

$$\underset{grav}{W_{A,B}} = -mgh = K_B - K_A$$

Si lanzamos el cuerpo en A, esperamos que la gravedad haga que se detenga en B, con lo que $K_B = 0$:

$$-mgh = -K_A \implies \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh \implies h = \frac{v_A^2}{2g}$$

Este resultado también lo podríamos obtener con cinemática. De hecho, para cualquier fuerza constante,

$$W_{AB} = F_0(x_B - x_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

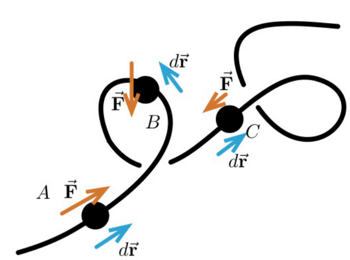
$$\frac{F_0}{m}(x_B - x_A) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) \implies 2a(x_B - x_A) = v_B^2 - v_A^2$$
$$\implies v_B^2 = v_A^2 + 2a(x_B - x_A)$$

la cual es una ecuación de cinemática para el movimiento con aceleración constante.

Ejemplo 1.5. *Trabajo neto al levantar una piedra.*

. Si levantamos una piedra desde A hasta B con rapidez constante, debemos ejercer una fuerza F_1 que contrarreste perfectamente el peso de la piedra, $mg\,\hat{\mathbf{y}}$. Ahora bien, el trabajo que realiza mg es $W_g = -mgh$, como ya lo habíamos calculado, y el trabajo que realizamos nosotros, dado que $F_1 = +mg \implies W_1 = +mgh$. El trabajo neto es cero: $W_1 + W_g = 0$. Esto no debe sorprendernos, puesto que dijimos que si no hay cambio de rapidez no hay trabajo neto, aunque para levantar la piedra se requiere energía.

1.4 Trabajo tridimensional



Definimos el trabajo en situaciones con varias dimensiones mediante la integral de un producto punto. Este tipo de integrales se llama *integrales de línea*:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Con las componentes cartesianas de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y el diferencial de desplazamiento $d\vec{\mathbf{r}}$ podemos resolver estas integrales:

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{x}} + F_y\,\hat{\mathbf{y}} + F_z\,\hat{\mathbf{z}}$$
$$d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$$
$$\implies W_{AB} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz$$

Ahora, con la energía cinética tenemos

$$W_{AB} = \frac{1}{2}m(v_{Bx}^2 - v_{Ax}^2) + \frac{1}{2}m(v_{By}^2 - v_{Ay}^2) + \frac{1}{2}m(v_{Bz}^2 - v_{Az}^2)$$

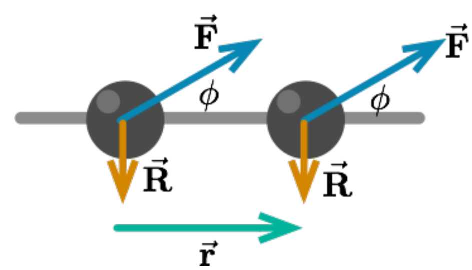
pero $v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_{Bz}^2 = v_B^2$ e igual con v_A, por lo que

$$= \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$

Aunque consideremos fuerzas tridimensionales, a la energía cinética solo le importa la *rapidez*, es decir, la magnitud de la velocidad. La presencia del producto punto nos dice que solo hacen trabajo las fuerzas que actúan de forma paralela al desplazamiento de la partícula. No hay que olvidar que también la integral se puede resolver considerando $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = |\vec{\mathbf{F}}||d\vec{\mathbf{r}}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$.

Volvamos a la figura. En A, tenemos una fuerza que acelera la partícula en una línea casi recta: la fuerza debe ser paralela a la partícula, y el trabajo es positivo puesto que $dW_A = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = |\vec{\mathbf{F}}||d\vec{\mathbf{r}}|\cos 0^\circ = Fdr > 0$. En B, la partícula está en un movimiento que podemos aproximar como circular uniforme, por lo que la fuerza debe ser una fuerza centrípeta y es perpendicular a la trayectoria. Por lo tanto en B el trabajo neto es cero, puesto que $dW_B = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = |\vec{\mathbf{F}}||d\vec{\mathbf{r}}|\cos 90^\circ = 0$. En C, el trabajo neto es negativo, puesto que la partícula va desacelerando de forma aproximadamente lineal, por lo que la fuerza y el desplazamiento van en direcciones contrarias: $dW_C = |\vec{\mathbf{F}}||d\vec{\mathbf{r}}|\cos 180^\circ = -Fdr < 0$. Observemos cómo el trabajo total sobre la curva sería la suma (integral) de los pequeños trabajos ($\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$) a lo largo de todos los puntos de la curva.

1.5 Trabajo de una fuerza tridimensional constante



Una cuenta se desliza sin fricción por un alambre recto, como en la figura. Una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a la cuenta como está en la figura, con un ángulo ϕ con el alambre. La cuenta se desplaza $\vec{\mathbf{r}}$. Calculemos el trabajo neto que se hace sobre la cuenta. Pongamos los ejes x y y de la forma usual (x horizontal positivo hacia la derecha, y positivo vertical hacia arriba)

Primero veamos el trabajo de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$:

$$W_F = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = F\Delta r\cos\phi$$

donde $\Delta r = |\Delta\vec{\mathbf{r}}|$. Ahora, el trabajo de la fuerza de reacción:

$$W_R = \vec{\mathbf{R}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = R\Delta r\cos 90^\circ = 0$$

por lo tanto, el trabajo neto sobre la cuenta es

$$W = W_F + W_R = F\Delta r\cos\phi$$

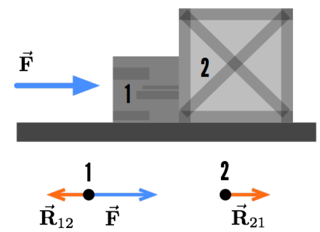
Observemos que *las fuerzas de reacción perpendiculares no hacen trabajo*. Por ejemplo, la fuerza normal de reacción de una superficie no puede hacer trabajo, pues el desplazamiento solo puede ser tangencial a la superficie y el ángulo siempre será de 90°. Esta es la gran ventaja de usar energías para hacer los cálculos: no hay que calcular las reacciones. Esto no es siempre lo que se busca: a los ingenieros civiles les conviene calcular las reacciones para ver si una estructura resistirá la carga.

Ejemplo 1.6. *Cuenta que se desliza.*

Ahora, un par de ejemplos numéricos con la misma situación:

$$(1)\ F = 2\,\text{N}, \quad \phi = 30°; \quad r = 1\,\text{m}; \quad W = 2 \cdot 1 \cdot \cos 30° = 1.73\,\text{J}$$

$$(2)\ \vec{\mathbf{F}} = 3\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}; \quad \vec{\mathbf{r}} = 0.3\,\hat{\mathbf{x}}; \quad W = (3\,\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \cdot (0.3\,\hat{\mathbf{x}}) = 3 \cdot 0.3 = 0.9\,\text{J}$$



Ejemplo 1.7. *Reacción que sí hace trabajo.*

Un importante ejemplo de una fuerza de reacción que *sí hace trabajo* es la situación de dos cajas siendo empujadas una contra la otra por un desplazamiento l. El trabajo neto sobre la caja 1 sería: $W_1 = (F - R_{12})l$, y el trabajo neto sobre la caja 2 sería: $W_2 = R_{21}l$. Sin embargo, si consideramos las cajas 1 y 2 como un todo (sistema), y sumamos ambos trabajos,

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 = Fl - R_{12}l + R_{21}l$$

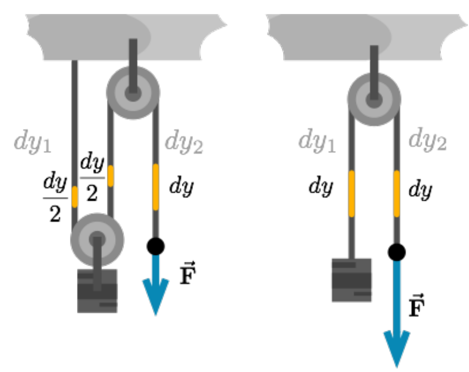
pero como por tercera ley de Newton $\vec{\mathbf{R}}_{12} = \vec{\mathbf{R}}_{21} \implies R_{12} = R_{21}$ (los signos ya están en la sumatoria) entonces,

$$W_{\text{total}} = Fl + (R_{21} - R_{21})l = Fl$$

con lo que si hacemos nuestro cálculo con ambas cajas, el trabajo de la reacción se cancela y no hay que calcularlo. Al fin y al cabo, el teorema de trabajo y energía cinética lo podemos aplicar con ambas cajas:

$$W_{\text{total}} = Fl = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(v_f^2 - v_i^2)$$

Ejemplo 1.8. *Ventaja mecánica.*



Observemos los dos sistemas de poleas de la figura. La caja tiene masa m. El sistema de la derecha no ofrece ventaja mecánica, pues puesto que la polea solo cambia la dirección de la cuerda. Entonces, para mover la caja se necesita que $F \geq mg$. El desplazamiento de un lado de la cuerda es igual al del otro lado, por lo que $dy_1 = dy_2 = dy$. El trabajo que hace la fuerza F para que la caja se mueva con velocidad constante es, entonces

$$W_F = F\Delta y = mg\Delta y$$

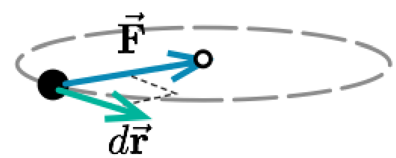
En cambio, para el sistema de la izquierda, hay una *ventaja mecánica*, puesto que la suma de fuerzas en la caja incluye las dos tensiones de la cuerda. La suma de fuerzas, para el caso en el que la caja se mueve con velocidad constante es

$$2T - mg = 0 \implies T = \frac{mg}{2}$$

En el punto de aplicación de la fuerza, la suma de fuerzas es $T = F$, por lo que F debe ser, como mínimo, $F = mg/2$. Con el sistema de polea móvil, la fuerza necesaria se ve reducida a la mitad. Todo en física tiene un precio, y en este caso, el precio que hay que pagar para que la fuerza se reduzca a la mitad es que el desplazamiento que hay que hacer es el doble, puesto que $dy_2 = 2dy_1$. Por lo tanto, el trabajo queda igual que el caso anterior:

$$W_F = \frac{mg}{2} \cdot 2\Delta y_1 = mg\Delta y_1$$

Por lo tanto, la energía necesaria para mover la caja en ambos casos es la misma.



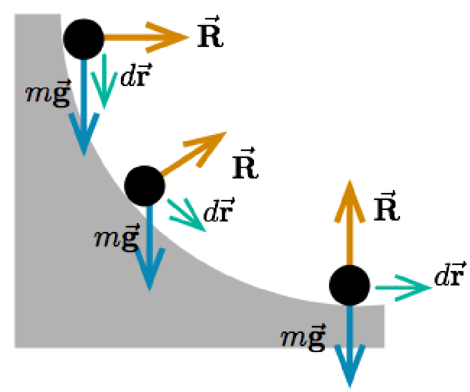
Ejemplo 1.9. *Trabajo en un movimiento circular uniforme.*

Como en un movimiento circular uniforme la fuerza siempre va en dirección radial hacia adentro, sabemos que $\vec{\mathbf{F}} = -F\,\hat{\mathbf{r}}$. En cambio, la velocidad, que es $d\vec{\mathbf{r}}/dt$, como sabemos, va en dirección angular: $\vec{\mathbf{v}} = v\,\hat{}$, por lo que $d\vec{\mathbf{r}} = dr\,\hat{}$. Ya dijimos que los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{}$ son mutuamente perpendiculares siempre, por lo que

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (-F\,\hat{\mathbf{r}}) \cdot (dr\,\hat{}) = -Fdr\cos 90^\circ = 0$$

y por eso, una fuerza centrípeta no realiza trabajo.

1.6 Trabajo en una superficie curva



Tenemos una superficie curva como la de la figura, por la cual una partícula se desliza sin fricción. Si la partícula se libera en la parte más alta de la curva, queremos calcular la velocidad con la que la partícula llega a la parte más baja de la curva. La curva tiene un radio a y la superficie forma exactamente un cuadrante de la circunferencia.

Hay que recordar que con los métodos de energía, lo que podemos encontrar es la *rapidez*, usando el teorema de trabajo y energía cinética, y no la *velocidad*. Sin embargo, en este caso podemos calcular la velocidad fijándonos que la rapidez en la parte más alta de la curva es $v_i = 0$, pero en la parte más baja es v_f. Como sabemos, la velocidad en una trayectoria circular debe ser siempre tangente a la curva, por lo que si llamamos x positivo hacia la derecha, $\vec{\mathbf{v}}_f = v_f\,\hat{\mathbf{x}}$. Llamemos también y positivo hacia arriba.

Ahora, calculemos la rapidez v_f con el teorema de trabajo y energía cinética. Para ello, necesitamos encontrar el trabajo neto, porque ese teorema solo es válido con el trabajo neto. La reacción del piso no hace trabajo, como ya vimos, puesto que es perpendicular siempre a la trayectoria.

Ahora, el trabajo de la gravedad requiere un poco de discusión. Como vemos, la gravedad siempre es $mg\,\hat{\mathbf{y}}$, pero $d\vec{\mathbf{r}}$ va cambiando de dirección a medida que la partícula baja por la curva. En general,

$$d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}}$$

pero

$$W = \int mg\,\hat{\mathbf{y}} \cdot (dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}}) = \int mgdy$$

por lo que hemos probado que sin importar la trayectoria que se tome, el trabajo de la gravedad solo toma en cuenta el desplazamiento *vertical* que se haga. Cuando el trabajo de una fuerza no depende de la trayectoria que esta lleve, sino solo de su posición relativa, se dice que esta fuerza es *conservativa*. Hablaremos más de fuerzas conservativas más adelante.

Entonces, el trabajo neto en todo el trayecto es

$$W_{i,f} = W_{g;i,f} = \int_i^f mg\,dy = -mg(y_f - y_i) = mga$$

y con el trabajo neto, usamos el teorema de trabajo y energía entre los puntos inicial y final:

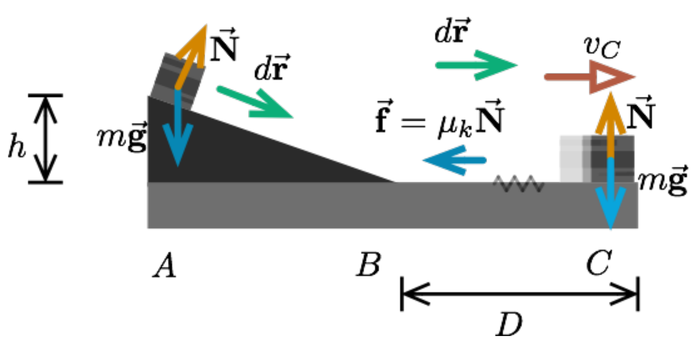
$$W_{i,f} = K_f - K_i \implies mga = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_f = \sqrt{2ga}$$

y la velocidad queda

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \sqrt{2ga}\,\hat{\mathbf{x}}$$

Curiosamente, la rapidez es la misma que si hubiera habido caída libre en línea recta: todo lo que hace la superficie curva es cambiar la dirección de la velocidad, pero no su magnitud.

1.7 Ejemplos adicionales



Ejemplo 1.10. *Varias fuerzas, fricción.*

Ahora, un ejemplo más completo sobre el uso del teorema de trabajo y energía cinética. Una caja se libera desde el reposo en el punto A, y queremos saber cuál será su rapidez en B y en C. El plano inclinado entre A y B tiene altura h. Entre B y C hay una superficie con fricción cinética, cuyo coeficiente es μ_k, y largo D.

Primero, ya sabemos que entre A y B la única fuerza que realiza trabajo es la componente en dirección del desplazamiento, y ni siquiera es necesario saber el ángulo de inclinación del plano, porque el trabajo neto entre A y B será

$$W_{AB} = mgh$$

Con esto, aplicamos el teorema de trabajo y energía cinética entre A y B:

$$W_{AB} = K_B - K_A \implies mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_B = \sqrt{2gh}$$

Nada en física es gratis, y sabemos que el precio que hay que pagar es que con energía no conocemos la velocidad sino solo la rapidez, y que no tenemos idea de la posición exacta de la partícula, porque no necesitamos el ángulo de inclinación o distancia recorrida entre A y B para hacer el cálculo. Sin embargo, como eso no es lo que pide el problema, no nos preocupamos por ese precio.

Para el trayecto entre B y C, debemos calcular el trabajo neto. La única fuerza que hace trabajo ahora es la fricción cinética:

$$W_{BC} = -\mu_k ND = -\mu_k mgD$$

con ello, vemos en cuánto se redujo la rapidez en C:

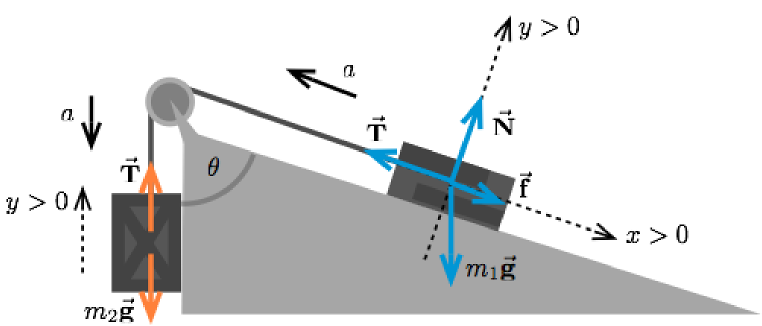
$$W_{BC} = K_C - K_B \implies -\mu_k mgD = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$-\mu_k gD + gh = \frac{v_C^2}{2} \implies v_C = \sqrt{2(-\mu_k gD + gh)}$$

Como vemos, la partícula se detiene cuando $\mu_k gD = gh$, o sea a una distancia D

$$D = \frac{h}{\mu_k}$$

Por ejemplo, con $\mu_k = 0.5$ y $h = 0.5\,\mathrm{m}$, lo máximo que puede medir D es $1\,\mathrm{m}$. Si $D > 1\,\mathrm{m}$, la rapidez nos daría imaginaria (es significa que la partícula nunca llega a esa posición)



Ejemplo 1.11. *Cajas y plano inclinado.*

Si $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$, $\theta = 60°$, $\mu_k = 0.13$, y el sistema parte del reposo y la caja 2 cae $h = 0.3\,\mathrm{m}$, calcule la velocidad final del sistema.

Usamos el teorema de trabajo y energía cinética,

$$K_{\mathrm{tot,f}} - K_{\mathrm{tot,i}} = W_{g1} + W_{g2} + W_f$$

El trabajo de la gravedad para la caja 2 es ($m_2 g$ y el desplazamiento de h van en la misma dirección por lo que es positivo):

$$W_{g2} = +m_2 gh$$

El trabajo de la gravedad para la caja 1 es:

$$W_{g1} = -m_1 g d_1 \cos\theta = -m_1 g h \cos\theta$$

El trabajo de la fricción es (f y el desplazamiento de h van en direcciones opuestas, por lo que es negativo):

$$W_f = -\mu_k N h$$

Ya habíamos establecido que al considerar los trabajos de todo el sistema, el trabajo que hace la tensión de la cuerda se cancela. Entonces,

$$\frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 - 0 = m_2 g h - \mu_k N h - m_1 g h \cos\theta$$

$$\frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2 = m_2 g h - \mu_k m_1 g \sin\theta h - m_1 g h \cos\theta$$

Sustituyendo valores numéricos,

$$v = 2.07\,\mathrm{m/s}$$

1.8 Potencia

La **potencia** cuánto trabajo (energía) se realiza por unidad de tiempo:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$\mathcal{U}[P] =$ W (Watt); $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$. Esta es la definición de *potencia media*. Si tomamos el límite cuando $\Delta t \to 0$, definimos la potencia instantánea:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

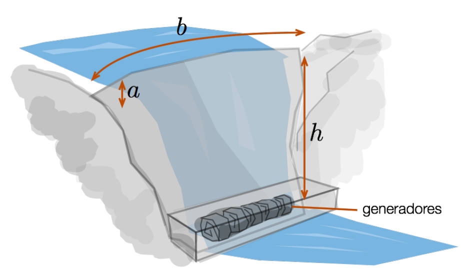
Si tenemos una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$, entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Ejemplo 1.12. *Tiempo para levantar una piedra.*

¿Por cuánto tiempo debe encenderse un motor de 10 W para levantar una piedra de 1 kg por una distancia de 10 m con rapidez constante?

Para levantar la piedra, en total se necesitan $W = mgh = 98\,\mathrm{J}$. El motor es capaz de entregar una potencia de 10 W, por lo que el tiempo necesario son $\Delta t = W/P = 9.8\,\mathrm{s}$. Lo de rapidez constante significa que toda la energía que entrega el motor se convierte en trabajo para levantar la piedra, o en otras palabras, la fuerza que hace el motor F tiene que ser igual a mg. Si la fuerza que hiciera el motor fuera mayor que mg, la piedra se movería de forma acelerada.



Ejemplo 1.13. *Represa.*

En unas cataratas, el caudal del agua es de $2400\,\mathrm{m^3/s}$, y cae por una distancia de 49 m. El río tiene un ancho $b = 800$ m y profundidad $a = 4$ m. Si un generador hidroeléctrico convirtiera el 15 % de la energía cinética del agua al caer en electricidad, a) ¿Cuál sería la potencia del generador? b) ¿Cuál sería el caudal (m^3/s) con el que fluye el agua al salir del generador? Sugerencia: use análisis dimensional y recuerde que la densidad del agua es 1000 kg/m^3.

El trabajo neto que se hace sobre el agua es

$$W_g - W_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde W_m es el trabajo que hace el generador, y es negativo porque la fuerza del generador sobre el agua y su desplazamiento van en direcciones opuestas. Dividimos esta ecuación por Δt:

$$\frac{W_g}{\Delta t} - \frac{W_m}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{m}{\Delta t}v^2 - \frac{1}{2}\frac{m}{\Delta t}v_0^2$$

Definimos $\dot{m}$ como $m/\Delta t$, con lo que

$$\dot{m}gh - P_m = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 - \frac{1}{2}\dot{m}v_0^2$$

Como el generador tiene un 15 % de eficiencia y está ubicado en la parte inferior de la cascada,

$$W_m = 0.15 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \implies P_m = 0.15 \cdot \frac{1}{2}\dot{m}v^2$$

con esto,

$$\dot{m}gh - 0.15 \cdot \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 - \frac{1}{2}\dot{m}v_0^2$$

Ahora, $\dot{m}$ lo determinamos con el caudal:

$$\mathcal{U}[\text{caudal}] = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}; \quad \mathcal{U}[\text{caudal} \cdot \rho] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{kg}/\mathrm{s}; \quad \mathcal{U}[\dot{m}] = \mathrm{kg}/\mathrm{s}$$

Por lo tanto, sustituyendo, $\dot{m} = 2.4 \cdot 10^6$ kg/s.

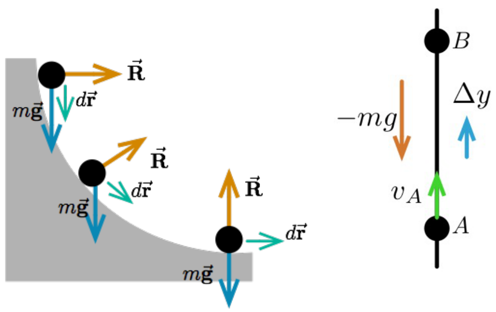
Ahora, usamos el mismo análisis dimensional para la velocidad inicial del agua:

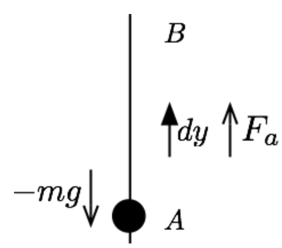
$$\mathcal{U}[v_0] = \mathrm{m}/\mathrm{s}; \quad \mathcal{U}[\text{caudal}/\text{área}] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\frac{1}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{m}/\mathrm{s}$$

con esto, $v_0 = \text{caudal}/(ab) = 0.75$ m/s. Con estos números despejamos $v = 28.9$ m/s y finalmente, la potencia, $P_m = 1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{W} = 0.15\,\mathrm{GW}$.

2 Energía potencial y energía mecánica

2.1 Energía potencial





Como ya vimos, para la gravedad, como $\vec{\mathbf{F}} = -mg\,\hat{\mathbf{y}}$, el trabajo es $W_{AB} = \int_A^B -mgdy = -mg(y_B - y_A)$ y es independiente de la trayectoria que tenga la partícula, puesto que nos dio igual para caída libre que para la trayectoria circular con gravedad. A una fuerza tal que el trabajo es independiente de la trayectoria se le llama **fuerza conservativa**.

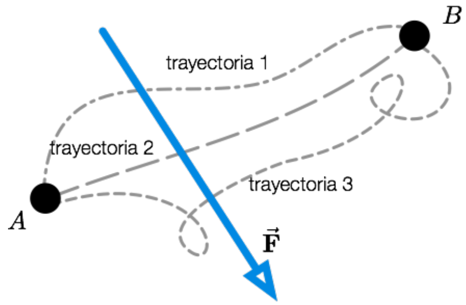
Supongamos que levantamos una piedra desde una altura y_A hasta una altura y_B. Definimos el **cambio de energía potencial** $U_B - U_A$ como el trabajo que *nosotros tenemos que hacer* para vencer la gravedad con rapidez constante. Entonces, dado que nosotros tenemos que ejercer una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_a$ *opuesta a la gravedad*:

$$W_{F_a;AB} = \int_A^B F_a\,dy = \int_A^B -(-mg)\,dy = mg(y_B - y_A) = U_B - U_A$$

Entonces, para una fuerza conservativa cualquiera F,

$$U_B - U_A = -\int_A^B Fdx$$

el menos significa que es el trabajo que *nosotros* tenemos que aplicar, que es el negativo del trabajo que hace la fuerza F. (En otras palabras, $F_a = -F$, y por definición, $U_B - U_A = W_{F_a;AB}$)



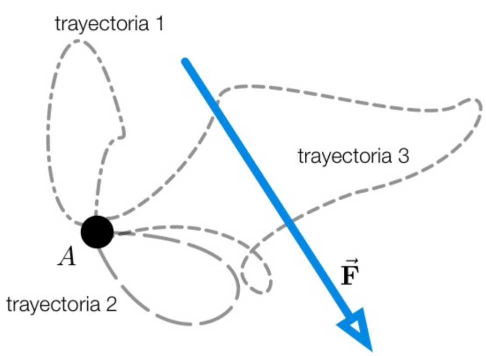
Para que podamos definir energía potencial, es necesario que la fuerza sea conservativa. Una fuerza conservativa, según la figura, cumple entonces que

$$\underset{\text{trayectoria 1}}{W_{F;AB}} = \underset{\text{trayectoria 2}}{W_{F;AB}} = \underset{\text{trayectoria 3}}{W_{F;AB}}$$

Entonces, en general,

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Este es el **teorema de trabajo y energía potencial**. Insistimos en que el menos significa que nuestra defınción es que es el trabajo que nosotros tenemos que hacer, que es el negativo del trabajo que hace la fuerza.

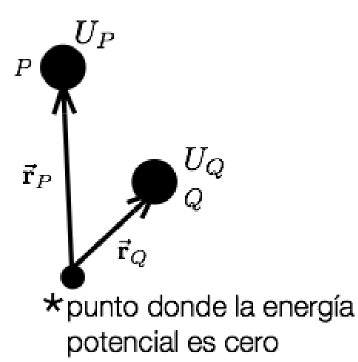


Si la trayectoria de partícula en la fuerza es cerrada, nos esclarece cuál es una fuerza conservativa y cuál no. Si tenemos una fuerza conservativa, por ejemplo, la gravedad, ya sabemos que sin importar la trayectoria, el trabajo es el mismo. Por lo tanto, en una trayectoria cerrada,

$$\underset{\text{trayectoria 1}}{W_{F;AA}} = \underset{\text{trayectoria 2}}{W_{F;AA}} = \underset{\text{trayectoria 3}}{W_{F;AA}} = \int_{\text{tray. cerrada}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U_A - U_A = 0$$

Es decir, si levantamos una piedra y luego la bajamos, el trabajo total es cero. Sin embargo, hay fuerzas que no cumplen con esto: por ejemplo, la fricción, puesto que si arrastramos una caja en círculos, siempre perdemos energía, sin importar si regresamos al lugar original o no. Por lo tanto, para la fricción o para cualquier fuerza no conservativa, $W_{AA} \neq 0$

Ahora, queremos definir una *función U* que represente la energía potencial medida respecto a un punto $\star$, donde, por definición, la energía potencial sea cero. De esta manera podemos comparar las energías potenciales de dos puntos P y Q. Esta función U no tiene significado físico si no nos ponemos de acuerdo sobre dónde es el punto $\star$ donde la energía potencial es cero. *Solo la diferencia de energía potencial tiene significado físico.*



La **energía potencial en un punto** P la definimos como

$$U_P = -\int_\star^P \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

donde $\star$ es un punto especial donde definimos que $U_\star = 0$.

2.2 Energía potencial gravitatoria

Para el caso de la gravedad,

$$U_g = -\int_{y=0}^{y} -mg\,dy = mgy$$

Ejemplo 2.1. *Edificio.*

Para entender mejor estos conceptos, consideremos un edificio de dos pisos, cada uno de los cuales mide 3 m de altura. Ahora, consideremos una caja de 2 kg que se encuentra en la azotea del edificio. ¿Cuál es su energía potencial? La respuesta depende de dónde consideremos nuestro marco de referencia.

a) ¿es $y = 0$ el suelo del primer piso? Si es así, la energía potencial sería $U = mgy = 2 \times 9.8 \times 6 \times = 117.6$ J.

b) ¿Es $y = 0$ el suelo del segundo piso? Si es así, $U = mgy = 2 \times 9.8 \times 3 = 58.8$ J.

c) ¿Es $y = 0$ la azotea del edificio? Entonces, $U = 0$.

d) ¿Es $y = 0$ un punto en el cielo a 50 m del suelo del primer piso? Si es así, $y = -50 + 6 = -44$ m, con lo que $U = mgy = -862.4$ J. La energía potencial puede ser negativa.

Ahora bien, si nos preguntan por el trabajo que hay que hacer para mover la caja desde la azotea hasta el suelo del segundo piso, todos los marcos de referencia dan el mismo resultado: a) $W_{AB} = U_A - U_B = mg(3-6) = -58.8$ J. b) $W_{AB} = U_A - U_B = mg(0-3) = -58.8$ J. c) $W_{AB} = U_A - U_B = mg(-3-0) = -58.8J$. d) $W_{AB} = U_A - U_B = mg(-47 - -44) = mg(-47+44) = -58.8$ J.

2.3 Energía potencial elástica

En el caso de un resorte, por la ley de Hooke, $F = -kx$. Entonces, la energía potencial elástica es

$$U = -\int_\star^x F dx = \int_0^x kx = \frac{kx^2}{2}$$

Aquí hemos definido $x = 0$ como el punto donde el resorte se encuentra relajado. Si necesitamos la energía potencial respecto a otro punto donde $x = 0$ que no sea donde el resorte está relajado, hay que calcularlo con la integral.

Ejemplo 2.2. *Resorte.*

Un resorte está relajado en la posición $x = 2$, y se comprime hacia x negativo, hasta la posición $x = 5$. La constante $k = 1$. ¿Cuál es su energía potencial en ese punto?

$$U(x=5) = -\int_{x=2}^{x=5} -(x-2)dx = \left.\frac{(x-2)^2}{2}\right|_2^5 = \frac{9}{2}$$

2.4 Fuerza a partir de la energía potencial

Consideremos una cantidad infinitesimal de trabajo, aplicando una fuerza F por un desplazamiento infinitesimal dx.

$$dW = Fdx$$

Ahora, sabemos que el trabajo es igual al cambio de energía potencial para una fuerza conservativa, y que hay un signo menos que sale de considerar el trabajo que nosotros debemos hacer en lugar del trabajo que debe hacer la fuerza. En este caso,

$$dU = -dW$$

$$\implies dU = -Fdx$$

con lo que la fuerza podemos obtenerla como

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

Comprobamos: en el caso de la gravedad, $F = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, y en el caso de la fuerza elástica, $F = -dU/dx = -d(\frac{1}{2}kx^2)/dx = -\frac{1}{2} \cdot 2kx = -kx$ como esperábamos.

En coordenadas polares, para el caso muy especial en el que la fuerza solo depende de r,

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

En general, en Cálculo III usted verá que la fuerza $F(x,y,z)$ se calcula en tres dimensiones como

$$F(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}}$$

donde el símbolo ∂ significa "derivada parcial", y se resuelve como una derivada común pero dejando las otras variables como si fueran constantes. Puede encontrar más información sobre derivadas parciales en el Resumen de Laboratorios de Física General I. Nuestro resultado para la fuerza $F(r)$ en coordenadas polares se puede calcular también con estas derivadas parciales, pues recuerde que $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2.5 Fuerzas no conservativas

La fricción es un ejemplo de fuerza no conservativa. La fricción disipa energía y por lo tanto no podemos definir una energía potencial para la fricción.

2.6 Energía mecánica

Definimos la energía mecánica como la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$E = K + U$$

La energía total, no necesariamente mecánica, la podemos definir como

$$E_{\text{total}} = K + U + W_Q$$

donde W_Q es el *calor*, trabajo de las fuerzas *no conservativas* o trabajo de otras fuerzas no consideradas en la energía potencial.

Sistema y entorno

Sistema es un conjunto de cuerpos que estudiamos en particular. Entorno es el resto del universo que no es el sistema. Sin importar nuestra definición de sistema o entorno, la respuesta debe dar la misma al utilizar los métodos de energía.

2.7 Conservación de la energía

Si solo hay fuerzas conservativas, la energía ***mecánica*** *se conserva*. Eso significa que la energía mecánica en dos instantes es la misma

$$E = E'$$

$$K + U = K' + U'$$

donde las variables que no tienen prima $(')$ son las iniciales, y las que tienen prima son las finales.

Si definimos $\Delta K = K' - K$ y $\Delta U = U' - U$, esto también lo podemos escribir como

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Si hay fuerzas no conservativas, podemos escribir, en general, para un sistema aislado dado, la **conservación de la energía total**

$$\Delta K + \Delta U = W_Q$$

donde $W_Q = \underset{\text{no conserv}}{W}$. Por convención, $W_Q > 0$ si la energía *entra* al sistema y $W_Q < 0$ si *sale* del sistema. Para la fricción, por ejemplo, $W_Q < 0$ porque es energía que el sistema pierde.

Elección del sistema y el entorno

Nuestra definición de qué es sistema y qué es entorno sí puede afectar nuestra habilidad para resolver el problema. Es decir, podemos aplicar conservación de la energía para cualquier elección de sistema y entorno, pero no siempre nos sirve para calcular lo que queremos.

Ejemplo 2.3. *Represa, segunda parte.*

Regresemos al problema de la represa. Vamos a elegir el sistema de dos formas:

(1) Sistema: agua; entorno: generador. Entonces, aplicando conserva-

ción de la energía al agua

$$\Delta K_{\text{agua}} + \Delta U_{\text{agua}} = W_{\text{agua a gen.}}$$

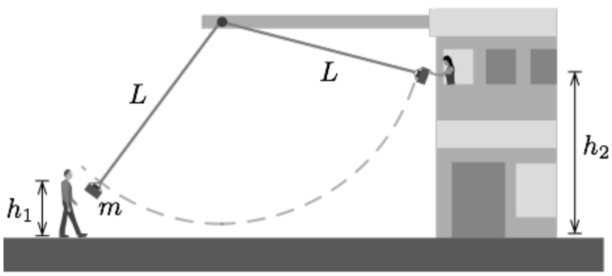
donde W_Q es el trabajo que hace el generador, y es lo que buscamos.

(2) Sistema:agua+generador; entorno: nada. Entonces, aplicando la conservación de la energía, hay que sumar la energía de cada componente del sistema:

$$\Delta K_{\text{agua}} + \Delta U_{\text{agua}} - W_{\text{agua a gen.}} + \Delta K_{\text{gen}} + \Delta U_{\text{gen}} - W_{\text{gen. a agua}} = 0$$

Pero como sabemos, $W_{\text{agua a gen.}} = -W_{\text{gen. a agua}}$, por lo que la incógnita se elimina y no nos sirve esa ecuación para calcular nada.

(3) Sistema: nada; entorno: agua+generador. Este es un caso trivial. Si el sistema no es nada, la conservación de la energía no se puede aplicar (da $0 = 0$)



Ejemplo 2.4. *Péndulo para transportar carga.*

Un péndulo se usa para transportar comida de masa m desde una altura h_1 hasta otra altura h_2. El largo del péndulo es L, y éste casi toca el suelo en el punto más bajo. a) Calcule la velocidad v_1 que se requiere para elevar la comida de forma que en h_2 se reciba con rapidez cero. b) Si la cuerda se rompe si su tensión supera $T_{\text{máx}}$, calcule la masa m máxima de comida que se puede transportar.

Usemos conservación de la energía mecánica para encontrar la rapidez inicial:

$$E_1 = E_2$$

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2$$

$$\implies v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

Ahora, para la parte (b), recordemos el problema del balde de agua: la tensión es máxima en el punto más bajo del péndulo, al cual llamémosle punto P. Entonces, del problema del balde

$$T_{\text{máx}} = m_{\text{máx}}(v_P^2/r + g)$$

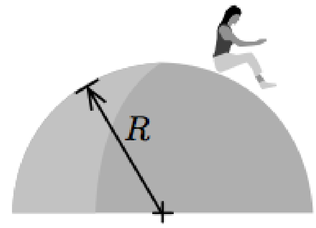
$$m_{\text{máx}} = \frac{T_{\text{máx}}}{v_P^2/L + g}$$

calculemos v_P:

$$E_1 = E_P \implies \frac{1}{2}mv_P^2 = mgh_1 \implies v_P = \sqrt{2gh_1}$$

$$m_{\text{máx}} = \frac{T_{\text{máx}}}{2gh_1/L + g}$$

Este mismo problema podríamos aplicarlo para una bola de metal de las que se usan para demoler paredes.



Ejemplo 2.5. *Muchacha que se desliza por un montículo de hielo.*

Una muchacha se desliza por un montículo semiesférico de hielo. Inicialmente se encuentra en la cúspide, donde definimos $\theta = 0$. Determine el ángulo donde ella abandona el hielo al caer. Sugerencia: la muchacha abandona el hielo cuando la normal se vuelve cero. ¿Cuál es la normal?

La componente radial del peso es la fuerza centrípeta:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

donde r es el radio del montículo. Apliquemos la conservación de la energía en el punto donde la muchacha abandona el hielo:

$$mgr = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

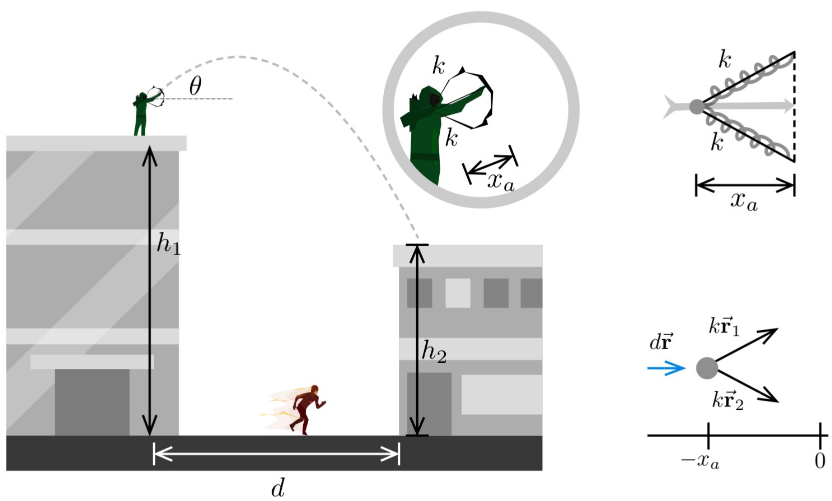
de la geometría del problema,

$$h = r\cos\theta$$

con lo que

$$mgr = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}mrg\cos\theta$$

con lo que obtenemos $\cos\theta = 2/3$, o bien $\theta = 48.2°$.



Ejemplo 2.6. *Arrow vs Flash, segunda parte.*

Para el mismo problema de Arrow vs Flash, supongamos que Arrow usa un arco con constante de resorte $k = 20\,\text{N/m}$, y una flecha de 300 g. Calcule la distancia a la que Arrow debe estirar la flecha para que la atrape Flash.

Usemos el diagrama para modelar la situación. Aproximamos el arco como dos resortes, cada uno de constante k. Queremos calcular x_a. El trabajo que hace el resorte superior en el desplazamiento de la flecha es:

$$W_1 = \int_{-x_a}^{0} k\vec{\mathbf{r}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{-x_a}^{0} -kxdx = \frac{kx_a^2}{2}$$

e igual para el resorte 2. Observe que debido al producto punto, la variable que nos queda es x_a y no el largo del resorte (podríamos calcularlo fácilmente con Pitágoras, sin embargo, si supiéramos el ancho del arco). El signo menos sale porque las x son negativas, por lo que con el signo menos queda la fuerza para la derecha.

Entonces, aplicamos teorema de trabajo y energía cinética:

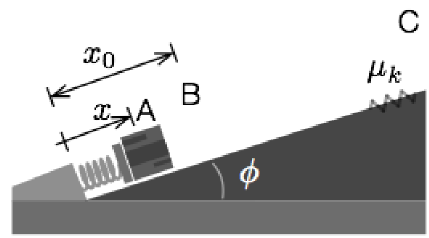
$$2\frac{kx_a^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2$$

y despejamos x_a, pues tenemos v del problema de cinemática que ya habíamos resuelto ($v = 5.61\,\mathrm{m/s}$). Despejando, obtenemos

$$x_a = \sqrt{\frac{mv^2}{2k}} = 0.49\,\mathrm{m}$$

Extra: Si el arco mide $0.6\,\mathrm{m}$, ¿cuál es el ángulo que hace la flecha con la cuerda? — El triángulo rectángulo que se forma tiene entonces cateto opuesto $0.6/2 = 0.3$ y cateto adyacente 0.49, con lo que $\theta = \arctan(0.3/0.49) \approx 31°$.

Ejemplo 2.7. *Energía mecánica contra energía total.*



En la situación de la figura, encontremos la altura final de la caja. Toda la rampa tiene fricción. Midamos la energía potencial gravitatoria desde el suelo. Conocemos $\phi = 30°$, $k = 100$, $x_A = 0.1$, $m = 1$, $x_0 = 0.3$, todo en unidades del SI. Hay que calcular la altura final de la caja si (a) $\mu_k = 0.2$, y (b) $\mu_k = 0$ (si no hay fricción). (c) Por último, hay que verificar si en la trayectoria cerrada B-C-B se conserva la energía mecánica con y sin fricción.

Para encontrar la altura final, vamos a ubicar varios puntos. A es el punto inicial, B es el punto donde la caja se separa del resorte, y coincide con x_0, la longitud relajada del resorte, puesto que en ese punto toda la energía potencial del resorte se ha convertido en energía cinética para la caja (menos lo que quita la fricción). Aplicamos conservación de la energía total entre A y B para encontrar la velocidad en B:

$$K_B - K_A + U_B - U_A = W_Q$$

sabemos que $K_A = 0$, pues al principio partimos del reposo. Entonces, calculemos las energía potenciales:

$$U_A = U_{A,grav} + U_{A,el}$$

$$U_{A,grav} = mgy_A = mgx_A \sin\phi = 0.05$$

$$U_{A,el} = \frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2 = 2$$
$$U_B = U_{B,grav} + U_{B,el}$$
$$U_{B,el} = 0 \iff U_{B,el} = \frac{1}{2}k(x_0 - x_0)^2$$
$$U_B = mgy_B = mgx_0 \sin\phi = 1.47$$

El trabajo de la fricción es

$$W_Q = \mu_k mg \cos\phi(x_0 - x_A) = 0.34$$

La conservación de la energía para el caso con fricción dice entonces que

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgx_0 \sin\phi - mgx_A \sin\phi - \frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2 - \mu_k mg \cos\phi(x_0 - x_A) = 0$$

numéricamente, para el caso (a)

$$0.5v_B^2 + 1.47 - 0.05 - 2 + 0.34 = 0 \implies v_B = 0.69$$

para el caso (b), donde $\mu_k = 0$, $v_B = 1.08$.

Ahora, para la trayectoria B-C,

$$U_B = mgy_B = mgx_0 \sin\phi = 1.47$$
$$U_C = mgy_C = mgx_C \sin\phi = 4.9x_C$$

El trabajo de la fricción sería

$$W_Q = -\mu_k mg \cos\phi(x_C - x_0) = -1.7x_C + 0.5$$

(el negativo es porque sale del sistema). La energía cinética

$$K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = 0.24$$
$$K_C = 0$$

con lo que, para (a)

$$K_C - K_B + U_C - U_B = W_Q$$

sustituyendo valores numéricos,

$$-0.24 + 4.9x_C - 1.47 = -1.7x_C + 0.5$$

Despejamos x_C y obtenemos $x_C = 0.33$. Ahora, para el caso (b),

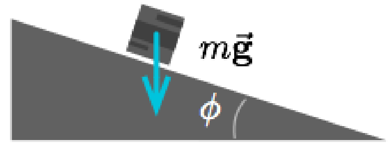
$$K_C - K_B + U_C - U_B = 0$$

sustituyendo valores numéricos, y recordando que para (b) tenemos $v_B = 1.08 \implies K_B = 0.58$,

$$-0.58 + 4.9x_C - 1.47 = 0$$

Despejando x_C, tenemos $x_C = 0.42$.

Con esto, comprobamos que sin fricción se llega más lejos. Ahora, la energía mecánica en B-C-B sin fricción permanece constante, y su valor es de $E = K + U = 2.05$, en cualquier instante. El trabajo total en esa trayectoria cerrada es cero, puesto que para subir se necesitan $U_C - U_B = 4.9 \times 0.42 - 1.47 = 0.59$ Joules, y para bajar, la misma cantidad pero con signo contrario. Es por eso que sin fricción podemos definir la energía potencial gravitatoria. Sin embargo, con fricción la energía mecánica se va perdiendo: de B a C hay una pérdida de $W_Q = 1.7 \times 0.33 - 0.5 = 0.061$ J, y al bajar, la pérdida también aumenta por una cantidad igual. Por eso, en la trayectoria cerrada, el trabajo de la fricción solo va aumentando, y por lo tanto no se puede definir una energía potencial para la fricción, y la energía mecánica no se conserva.



Ejemplo 2.8. *Varias técnicas, un mismo resultado.*

Mostremos que podemos resolver el mismo problema tanto con técnicas de dinámica (fuerzas) como con técnicas de energía. Consideremos la caja deslizándose en la rampa sin fricción que mostramos en la figura. Queremos calcular su aceleración, pues con ella podemos siempre integrar (aunque sea con nuestra tabla de integración numérica) para encontrar cómo se mueve en función del tiempo.

Por fuerzas.— El diagrama de fuerzas es muy fácil. La normal es perpendicular a la superfice, y el peso siempre va hacia abajo. Entonces, poniendo x paralelo a la superficie y positivo hacia abajo, y y perpendicular a la superficie y positivo hacia arriba,

$$\sum F_y = -mg\cos\phi + N = 0; \quad \sum F_x = mg\sin\phi = ma \implies a = g\sin\phi$$

Por energía mecánica.— Como no hay fricción, la energía mecánica se conserva. Por eso, la energía mecánica en un momento dado es

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

donde y es la posición vertical de la caja. Vamos a llamar l al desplazamiento en la dirección de la rampa, positivo cuesta arriba. Por trigonometría, $y = l\sin\phi$. Ahora, para demostrar que la aceleración es la misma, vamos a escribir la expresión anterior con derivadas:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl\sin\phi = E = \text{const}$$

La rapidez va en la dirección tangente al desplazamiento, por eso no usamos y, sino que l como variable. Ahora, derivemos a ambos lados respecto a t. Note que hay que usar la regla de la cadena.

$$\frac{1}{2}m \cdot 2\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2l}{\mathrm{d}t^2} + mg\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\sin\phi = 0$$

$$mva + mgv\sin\phi = 0$$

podemos simplificar para obtener

$$a = -g\sin\phi$$

el menos se debe a que l es positivo cuesta arriba, y la aceleración va cuesta abajo. Nótese cómo nunca tuvimos que usar la fuerza normal; basta conocer hacia adónde se puede y no se puede mover la caja (tuvimos que definir l).

Por teorema de trabajo y energía cinética.— Usando el teorema de trabajo y energía cinética, con y positivo hacia arriba, tenemos

$$W = K - K_0$$

$$-mg(y - y_0) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde y_0 es la posición inicial y v_0 es la rapidez inicial. El trabajo de la gravedad es positivo porque la fuerza va en la misma dirección del desplazamiento: el signo menos es porque definimos positivo hacia arriba, entonces la fuerza es $-mg$, pero el desplazamiento $y - y_0$ también es negativo, porque $y < y_0$, pues la partícula va hacia abajo. Ahora bien, y y v son funciones del tiempo, es decir, $y = y(t)$ y $v = v(t)$, mientras que los términos iniciales son constantes. Eso signfica que podemos agruparlos así:

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

con lo que volvemos a obtener

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

derivamos a ambos lados y obtenemos el mismo resultado que con conservación de la energía mecánica y con fuerzas.