

Precesión de los equinoccios

C culo y expansión del potencial. Para empezar vamos a considerar a la Tierra como un elipsoide, cuyos momentos de inercia en los ejes principales están dados por I, I, I_z . El potencial que el Sol ejerce sobre un elemento de masa dm está dado por

$$dV = -\frac{GM_\odot dm}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{r})^2}} \quad (1)$$

donde las cantidades vectoriales est n definidas a través de la siguiente figura:

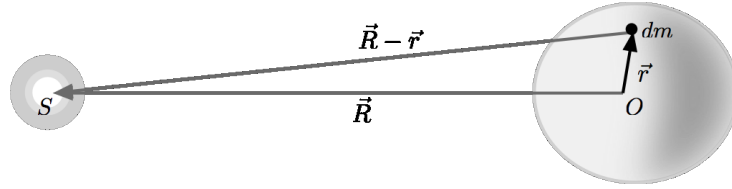


Figure 1. Configuración del sistema.

Y además, $\vec{R} = (X, Y, Z)$. Vamos a utilizar la expansión del potencial tal y como se hace en la secc. 14 de Kompaneyets *Theoretical Physics*, que se inicia una serie de Taylor centrada en 0 en términos de x, y, z , puesto que $R \gg r$.

$$[\sum_i (X_i - x_i)^2]^{-1/2} = \sum_i^{[\text{dentro}]} \sum_{j,k} [X_i^2]^{-1/2} - x_j \frac{\partial}{\partial X_j} [X_i^2]^{-1/2} + \frac{1}{2} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_k} [X_i^2]^{-1/2} + \dots$$

La suma del índice i se hace dentro de los corchetes, de forma que $\sum_i^{[\text{dentro}]} [X_i^2]^{-1/2} = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{-1/2} = 1/R$. Ahora bien:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \frac{1}{R} = \frac{\partial R}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} = -\frac{X_j}{R^3} \text{ puesto que } \frac{\partial R}{\partial X_j} = \frac{X_j}{R}.$$

De igual manera, al calcular la segunda derivada, se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_k} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} \frac{\partial X_j}{\partial X_k} + 3 \frac{X_j X_k}{R^5}.$$

Con lo anterior, la expansión queda

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \sum_{ij} \frac{1}{R} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R^3} + \frac{1}{2} x_i x_j \left(\frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{ij} \right)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Ahora, restemos del término cuadrático una expresión que es igual a cero, $\frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \nabla^2 (1/R) \left(\frac{1}{R} \right) = 0$. En general, recordando la ley de Gauss y la ecuación de Poisson, $\nabla^2 (1/R) = 4\pi \delta(R)$, pero como $R \neq 0$, sabemos que el resultado será cero. Entonces, dicho término quedaría

$$\sum_{ij} \frac{1}{2} \left[x_i x_j \left(\frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} r^2 \left(\frac{3(X^2 + Y^2 + Z^2)}{R^5} - \frac{3}{R^3} \right) \right]$$

Al desarrollar la suma, cuando $i = j$, el primer término entre paréntesis se sumará con el X^2 del segundo término entre paréntesis, y así sucesivamente, hasta obtener la siguiente expresión simplificada:

$$\sum_{ij} \left(x_i x_j - \delta_{ij} \frac{r^2}{3} \right) \left(\frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{ij} \right)$$

Al primer término entre paréntesis, integrado en dm , lo llamamos J_{ij} , y *no es el tensor de inercia*. Es un término análogo al momento cuadrupolar en el caso eléctrico, y tal y como aparece en la ecuación 14.23 de Kompaneyets, está relacionado con los momentos de inercia (ya puestos en los ejes principales) J_i por medio de

$$J_1 = \frac{1}{3}(I_2 + I_3 - 2I_1) \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1 + I_3 - 2I_2) \quad (3)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 - 2I_3) \quad (4)$$

Como puede verse, si la Tierra fuera una esfera perfecta, $I_1 = I_2 = I_3$ implicarían $J_1 = J_2 = J_3 = 0$, y el potencial se reduciría al de una partícula. Poniendo todo en su lugar, la expresión del potencial ya integrado es

$$V \approx \sum_{ij} -GM_{\odot} \left[\frac{M}{R} + \frac{\int dm \vec{r} \cdot \vec{R}}{R^3} + \frac{1}{2} J_{ij} \left(\frac{3X_i X_j}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (5)$$

donde $J_{ij} = \int \left(x_i x_j - \delta_{ij} \frac{r^2}{3} \right) dm$. Como \vec{r} está medido desde el centro de masa, $\int dm \vec{r} = 0$. El sistema está orientado con los ejes principales de inercia, así que $J_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Más aún, en virtud de las ec. 2-4.

$$J_1 = \frac{1}{3}(I_z - I) = J$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_z - I) = J$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(2I - 2I_z) = \frac{2}{3}(I - I_z) = -2J$$

$$V \approx \sum_i -GM_{\odot} \left[\frac{M}{R} + \frac{1}{2} J_{ii} \left(\frac{3X_i^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \delta_{ii} \right) \right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{GMM_{\odot}}{R} - \frac{1}{2} J \left(\frac{3(X^2 + Y^2)}{R^5} - \frac{2}{R^3} \right) GM_{\odot} + J \left(\frac{3Z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) GM_{\odot} \\ &= -\frac{GMM_{\odot}}{R} + \frac{3}{2} GM_{\odot} J \left(\frac{3Z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

donde en la última ecuación hemos usado el hecho de que $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

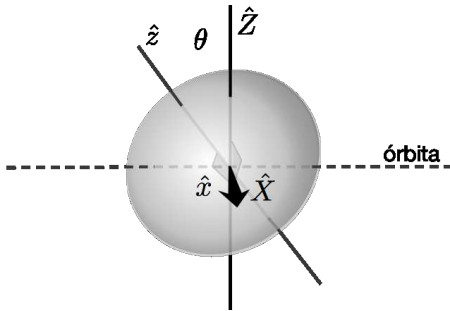


Figure 2. Ubicación de los ejes x y X .

Los ángulos de Euler. En un momento dado, pueden elegirse los ejes x y X de forma que coincidan, como lo muestra la fig. 2. Cuando no coinciden, forman un ángulo ψ . Además, expresamos la velocidad angular en términos de este ángulo ψ , θ y el ángulo de la rotación diaria φ . Este conjunto de ángulos forma los ángulos de Euler, y en la fig. 3 se muestra la definición de los mismos.

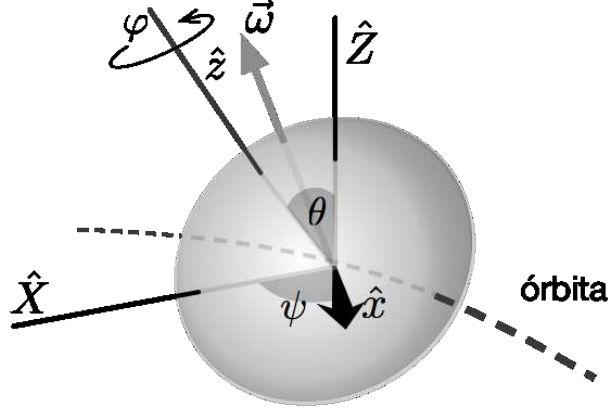


Figure 3. Definición de los ángulos de Euler.

La relación de velocidades angulares, según Kompaneyets, secc. 9 (ecs. 9.15–9.17) es

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \quad (8)$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \quad (9)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (10)$$

que, como se espera, si θ y ψ son constantes (si solo existiera la rotación diaria), coincide con el eje \hat{z} .

Potencial en términos de los ángulos de Euler. A continuación, necesitamos expresar la dirección del vector \vec{R} en el sistema de coordenadas rotante. Para ello, dado que usaremos los ángulos de Euler, vamos a utilizar la matriz de rotación de Euler, de forma que podamos transformar el vector fijo $\vec{R} = (X, Y, Z)$ al sistema rotante. \vec{R} en el sistema fijo es la órbita circular que suponemos sigue la Tierra en el plano xy , y será denotada como $\vec{R} = (R \cos \omega_T t, R \sin \omega_T t, 0)$, donde $\omega_T = 2\pi/1$ año terrestre es la velocidad angular de traslación.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{no inerc}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \cos \omega_T t \\ R \sin \omega_T t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Según la ec. 7, solo necesitamos la componente Z^2 :

$$Z = \sin \psi \sin \theta R \cos \omega_T t - \cos \psi \sin \theta R \sin \omega_T t$$

$$Z^2 = \sin^2 \psi \sin^2 \theta R^2 \cos^2 \omega_T t + \cos^2 \psi \sin^2 \theta R^2 \sin^2 \omega_T t - 2 \sin \psi \sin^2 \theta \cos \psi R^2 \cos \omega_T t \sin \omega_T t \quad (11)$$

Como hemos hecho la aproximación de que la órbita terrestre es circular, podemos descartar las partes del potencial que no dependen de los ángulos de Euler (la información de la gravedad actuando sobre el centro de masa de la Tierra ya está contenida en la órbita). Además, dado que la información sobre la traslación está contenida en dicha aproximación, podemos promediar el potencial en el tiempo. Hacerlo tiene la consecuencia de que renunciamos a que la velocidad de rotación pueda verse afectada por el potencial.

$$\langle Z^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin^2\psi \sin^2\theta R^2 \cos^2\omega_T t + \cos^2\psi \sin^2\omega_T t - 2 \sin\psi \sin^2\theta \cos\psi R^2 \cos\omega_T t \sin\omega_T t] d(\omega_T t)$$

El último término se hace cero, puesto que $\int_0^{2\pi} \cos\omega_T t \sin\omega_T t d(\omega_T t) = 0$. Y dado que las integrales de \cos^2 y \sin^2 dan π , queda

$$\langle Z^2 \rangle = \frac{R^2 \sin^2\theta}{2} \quad (12)$$

Con lo que el potencial queda

$$\langle V \rangle = \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} J \left(\frac{3 \sin^2\theta - 2}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} J \left(\frac{1 - 3 \cos^2\theta}{2} \right) \quad (13)$$

La energía cinética. A continuación debemos estudiar la energía cinética del sistema. Volviendo a la fig. 1, si queremos ubicar un punto de la Tierra respecto al marco inercial S , debemos hacer $\vec{x} = \vec{R} + \vec{r}$, expresados en vectores base del sistema inercial. La velocidad en el marco inercial sería entonces $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Debido al movimiento rotacional (circular uniforme), la velocidad puede expresarse como $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega}_T \times \vec{R}$, y también $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}_{\text{no inerc}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Entonces, la energía cinética sería

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dm \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 &= \int \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_T \times \vec{R} + \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2} \left[(\vec{\omega}_T \times \vec{R})^2 + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + 2(\vec{\omega}_T \times \vec{R}) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dm \\ &= \frac{M}{2} \omega_T^2 R^2 + \int \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dm + \frac{1}{2} \int 2(\vec{\omega}_T \times \vec{R}) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) dm \end{aligned}$$

el último término de la expresión anterior es cero porque $\int \vec{r} dm = 0$, es decir, \vec{r} se mide desde el centro de masa. El término del centro, al expandirlo, es (el punto significa derivación respecto al marco no inercial)

$$\int \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int \dot{r}_{\text{In}}^2 dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm + \frac{1}{2} \int 2\dot{r}_{\text{In}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

El primer término se hace cero puesto que \vec{r} es la posición de cada elemento de masa, y como la Tierra es un cuerpo rígido, dicha posición no cambia en un marco no inercial fijo a la Tierra. El segundo término, al ser escrito de forma matricial, puede cambiarse por $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$, donde \mathbf{I} es el tensor de inercia. Esta expresión, expandida, queda $\frac{1}{2} I(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$. El último término se anula por la misma razón que el primero. La energía cinética queda, entonces

$$T = \frac{1}{2} MR^2 \omega_T^2 + \frac{1}{2} I(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \quad (14)$$

Lagrangiano. Procedemos a construir el lagrangiano que describe este sistema en un marco inercial sustituyendo las ecs. 8–10 en 14 para la energía cinética en términos de los ángulos de Euler, y restando la energía potencial promedio, ec. 13. Esto es, $L = T - \langle V \rangle$ y:

$$L = \frac{1}{2} MR^2 \omega_T^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta)^2 + \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} J \left(\frac{3 \cos^2\theta - 1}{2} \right)$$

Ecuaciones del movimiento. En primer lugar, vemos que las variables ψ y φ son cíclicas, con lo que obtendremos dos constantes de movimiento, llamadas p_ψ y p_φ respectivamente, y que tienen relación con el momento angular (pero no son directamente el momento angular). Entonces,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow I_z(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = p_\varphi \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow I \dot{\psi} \sin^2 \theta + p_\varphi \cos \theta = p_\psi \quad (16)$$

Una de las constantes del movimiento de este sistema es la energía mecánica. Si de las ecs. 15 y 16 se despejan $\dot{\psi}$ y $\dot{\varphi}$ y se sustituyen en la definición de la energía mecánica, $E = T + \langle V \rangle$, obtenemos

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{I} + \frac{p_\varphi^2}{2 I_z} + \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} J \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{2} \right) \quad (17)$$

que, como puede verse, si se sustituye $\theta = \text{const}$, $\dot{\theta} = 0$ y se obtiene un valor de la energía, que es una solución válida para las ecuaciones del movimiento. Una observación, sin embargo: en el proceso de despejar $\dot{\psi}(p_\varphi, p_\psi)$ y $\dot{\varphi}(p_\varphi, p_\psi)$, se ha dividido entre $\sin^2 \theta$, por lo que la expresión 17 no es válida para cuando $\theta = 0$, aunque ese caso también es admisible como solución.

Entonces, fijando θ , la ecuación del movimiento sería

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ 0 &= I \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} 3J \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (18)$$

Resolviendo para $\dot{\psi}$, puesto que conocemos θ y $\dot{\varphi}$, y sustituyendo $J = \frac{1}{3}(I_z - I)$

$$\dot{\psi} = \frac{-I_z \dot{\varphi} \pm \sqrt{I_z^2 \dot{\varphi}^2 - 4(I - I_z) \cos \theta \frac{3}{2} \frac{GM_\odot}{R^3} (I_z - I) \cos \theta}}{2(I - I_z) \cos \theta} \quad (19)$$

Momento de inercia terrestre. El momento de inercia de un elipsoide es

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5} M (R_e^2 + R_p^2) \\ I_z &= \frac{2}{5} M R_e^2 \end{aligned}$$

donde R_e es el radio ecuatorial y R_p es el radio polar.

Precisión de los equinoccios. Con la ecuación 19, tomamos en cuenta el mismo efecto pero causado por la Luna de forma aproximada, sencillamente sumando en el potencial GM_ζ / R_ζ^3 , de forma que finalmente,

$$\dot{\psi} = \frac{-I_z \dot{\varphi} \pm \sqrt{I_z^2 \dot{\varphi}^2 - 4(I - I_z) \cos \theta \frac{3}{2} \left(\frac{GM_\odot}{R^3} + \frac{GM_\zeta}{R_\zeta^3} \right) (I_z - I) \cos \theta}}{2(I - I_z) \cos \theta} \quad (20)$$

Numéricamente,

```
Python 2.7.5 (default, Mar 9 2014, 22:15:05)
[GCC 4.2.1 Compatible Apple LLVM 5.0 (clang-500.0.68)]
```

Python plugin for TeXmacs.

Please see the documentation in Help -> Plugins -> Python

```
Python] from __future__ import division
Python] from math import *
Python] T = 24*3600. # periodo de rotacion en segundos
Python] phidot = 2*pi/T
Python] theta = 23.44*(pi/180.) # inclinacion terrestre
Python] ML = 7.3459e22 # kg
Python] RL = 3.801e8 # m
Python] M = 5.97219e24 # kg
Python] G = 6.673e-11 # unidades del SI
Python] MSol = 1.989e30 # kg
Python] R = 1.518e11 # m
Python] Re = 6378.137*1000 # m
Python] Rp = 6356.752*1000 # m
Python] I = 1./5*M*(Re**2+Rp**2)
Python] Iz = 2/5.*M*Re**2
Python] psid=(-Iz*phidot+sqrt((Iz*phidot)**2-4*(I-Iz)*cos(theta)*(3/2.)*\
    (G*MSol/R**3+G*ML/RL**3))*(Iz-I)*cos(theta) )/(2*(I-Iz)*cos(theta))
Python] print psid
-8.05782949868e-12
Python] print "period = ", abs(2*pi/psid)/(3600*24*365), "yr"
('period = ', 24726.075318262385, 'yr')
```

Una aproximación aceptable; el período de precesión más refinado es de 25 730 años.

Achatamiento de la Tierra. De igual manera, con el valor más refinado de la precesión de los equinoccios, es posible estimar el achatamiento que este torque le hace a la Tierra. Para ello, en la ec. 18, aproximamos descartando los términos $\dot{\psi}^2$, y despejando $(I_z - I)/I_z$, obtenemos

$$\frac{(I_z - I)}{I_z} \approx \frac{2}{3} \dot{\psi} \left(\frac{GM_\odot}{R^3} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^3} \right)^{-1} \frac{\dot{\phi}}{\cos \theta}$$

que, numéricamente,

```
Python] psidot = 2*pi/(25730.*365*24*3600)
Python] achatamiento = (2./3)*psidot*((G*MSol)/R**3+G*ML/RL**3)**(-1)*\
    phidot/cos(theta)
Python] print achatamiento
0.00321663730271
Python] print (Iz - I)/Iz
0.003347239099
```

Este valor indica que la presencia del torque (solar y lunar) que da origen a la precesión de los equinoccios explica el achatamiento terrestre.

Referencias

- Kompanejets (2012). *Theoretical Physics*, Dover Publications. ISBN 978-0-486-60972-0.
- Hand, Finch (1998). *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-57572-9 Cap. 8, p. 322.
- Wolfram Alpha (para los valores de constantes). www.wolframalpha.com