

Estudio de dos esferas concéntricas con hemisferios a distintos potenciales

André Oliva

II-2014 — Teoría Electromagnética (Prof. Marcela Hern andez)
Universidad de Costa Rica

1 Función de Green para la esfera

Consideremos para empezar el problema de imágenes frente a una esfera de radio a . Es un problema bien conocido, pero lo usaremos más adelante, con lo que vale la pena repetirlo. El potencial debido a la carga (q , ubicación y) y su imagen (q' , ubicación y') es

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|r\hat{n} - y\hat{n}'|} + \frac{q'}{|r\hat{n} - y'\hat{n}'|}$$

y deben cumplir con que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(|\vec{r}| = a, \vec{y}) = \frac{q}{a|\hat{n} - \frac{y}{a}\hat{n}'|} + \frac{q'}{y'|\hat{n} - \frac{a}{y'}\hat{n}'|} \\ \implies &\frac{q}{a\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} - 2\frac{y}{a}\cos\gamma}} + \frac{q'}{y'\sqrt{1 + \frac{a^2}{y'^2} - 2\frac{a}{y'}\cos\gamma}} = 0 \end{aligned}$$

con $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$. Para que esto se cumpla también debe cumplirse con que

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'}; \quad y' = \frac{a^2}{y}$$

y esto lleva a la solución final,

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|r\hat{n} - y\hat{n}'|} - \frac{q}{y|r\hat{n} - \frac{a^2}{y}\hat{n}'|}$$

La función de Green se encuentra simplemente resolviendo los productos punto de nuevo en términos del $\cos\gamma$ y colocando la carga unitaria:

$$G_D(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2\frac{y^2}{a^2} - 2yr\cos\gamma}}$$

Hasta aquí, no hay problema si $y > a$ o $y < a$, por lo que la función de Green es la misma para el interior de la esfera que para el exterior.

2 Potencial de dos hemisferios concéntricos a diferente potencial

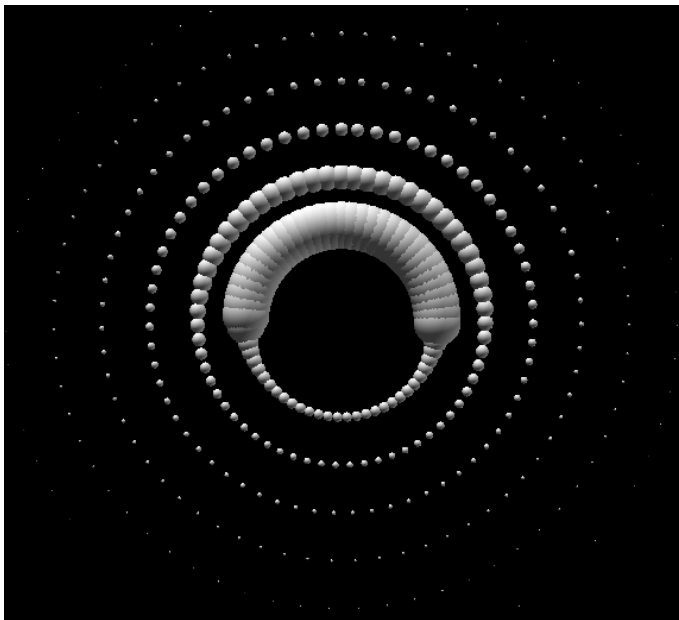
Dos hemisferios concéntricos, de radios a y b , se encuentran a diferente potencial. De hecho, el exterior está aterrizado, y el interior tiene una densidad de carga superficial uniforme. Este sistema nos da una oportunidad de aplicar numéricamente el método de imágenes. Primero veamos las partes *relevantes* del código, en Python, mediante el uso del módulo VPython:

```
from __future__ import division
from visual import *
from numpy import arange

V = 1
a = 0.2
b = 0.8

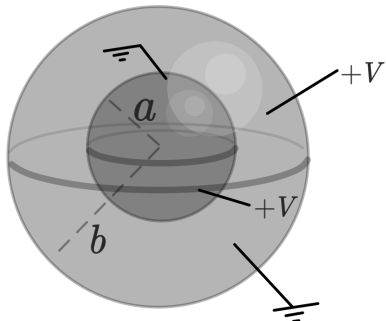
for r in arange(a,b,0.1):
    for theta in arange(0,2*pi,0.1):
        V = 0
        vecr = vector(r*sin(theta),0,r*cos(theta))
        for thetap in arange(-pi/2,pi/2,0.1):
            V += 0.02/mag(vecr-vector(a*sin(thetap),0,a*cos(thetap)))
            V += -0.02*b/(a*mag(vecr - b**2/a*vector(sin(thetap),0,cos(thetap))))
        Vt = V*0.01
        clr = color.white
        sphere(radius=abs(Vt),color=clr,pos=vector(r*sin(theta),0,r*cos(theta)))
```

Esencialmente, lo que estamos haciendo es colocando cargas en la superficie de la esfera interior, y al mismo tiempo colocando imágenes para cada carga de forma que en la superficie $r = b$ el potencial sea cero. Solo lo hacemos para una "tajada" de la esfera, puesto que la situación es totalmente simétrica en φ . Luego, utilizamos esferas cuyo radio sea proporcional al potencial calculado para poder visualizarlas. La variable `thetap` corresponde a nuestro θ' , y barre cada carga en el hemisferio. Ahora bien, el cálculo del potencial no se detiene en $\theta = \pi/2$, sino que sigue alrededor. El resultado se ve a continuación



Como esperábamos, el potencial es asimétrico, y la parte que más llama la atención es la parte inferior, donde no hay cargas, pero aún así hay potencial por el efecto de las orillas del hemisferio. El potencial se anula en $r = b$, tal como lo anticipamos por el método de imágenes.

3 Forma analítica de solución de la ecuación de Laplace



Veamos el problema completo ahora: son cuatro hemisferios a diferentes potenciales, formando dos esferas concéntricas, de radios a y b respectivamente, con $a < b$.

Hay que resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. El sistema es simétrico en φ , con lo que la coordenada no puede aparecer en nuestra solución.

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = 0$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(a, \theta) = \begin{cases} V, & \theta < \pi/2 \\ 0, & \theta > \pi/2 \end{cases} \quad \phi(b, \theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \pi/2 \\ V, & \theta > \pi/2 \end{cases}$$

con lo que podemos escribir las condiciones de frontera también como

$$\phi(a, \theta) = V[1 - H(\theta - \pi/2)]; \quad \phi(b, \theta) = V H(\theta - \pi/2)$$

donde H es la función escalón unitario de Heaviside. Ahora, sabemos que la solución general de la ecuación de Laplace, tomando en cuenta la simetría, es

$$\phi(r, \theta) = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-l+1}) P_l(\cos \theta)$$

Ahora aplicamos la primera de las condiciones iniciales,

$$\phi(a, \theta) = \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l+1}) P_l(\cos \theta) = V[1 - H(\theta - \pi/2)]$$

Esta es una serie en polinomios de Legendre para la función $\phi(a, \theta)$. Multiplicando por $P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta$ e integrando, obtenemos

$$\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \phi(a, \theta) d\theta = \sum_l (A_l a^l + B_l a^{-l+1}) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre (Weber), $\int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \phi(a, \theta) d\theta &= (A_l a^l + B_l a^{-l+1}) \frac{2}{2l+1} \\ \implies A_l a^l + B_l a^{-l+1} &= \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta \phi(a, \theta) d\theta \end{aligned}$$

Sustituimos ahora $\phi(a, \theta) = V[1 - H(\theta - \pi/2)]$, lo que anulará la integral para cualquier $\theta > \pi/2$. Por lo tanto

$$A_l a^l + B_l a^{-l+1} = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\pi/2} V P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Ahora hacemos $x = \cos \theta$; $dx = -\sin \theta d\theta$,

$$A_l a^l + B_l a^{-l+1} = \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx$$

Por otro lado, la otra condición de frontera se comporta exactamente igual, solo que $a \rightarrow b$ y ahora el intervalo que sobrevive a la función escalón es $]\pi/2, \pi[$, con lo que

$$A_l b^l + B_l b^{-l+1} = \frac{2l+1}{2} \int_{\pi/2}^\pi V P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

y haciendo el mismo cambio de variable,

$$A_l b^l + B_l b^{-l+1} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^0 V P_l(x) dx$$

$$A_l b^l + B_l b^{-l-1} = \frac{2l+1}{2} (-1)^l V \int_0^1 P_l(x) dx$$

Estas dos ecuaciones se pueden resolver para A_l y B_l . Vamos a mostrar nada más una parte del proceso, pues se hace bastante largo. El sistema de ecuaciones, en notación más simplificada, queda

$$\begin{cases} Ab^l + Bb^{-l-1} = C(-1)^l D \\ Aa^l + Ba^{-l-1} = CD \end{cases}$$

con $C = \frac{2l+1}{2} V$; $D = \int_0^1 P_l(x) dx$. De la segunda de estas ecuaciones,

$$\begin{aligned} Ba^{-l-1} &= CD - Aa^l \\ B &= (CD - Aa^l) a^{l+1} \\ B &= CDa^{l+1} - Aa^{2l+1} \end{aligned}$$

insertando en la primera ecuación,

$$\begin{aligned} Ab^l + [CDa^{l+1} - Aa^{2l+1}]b^{-l-1} &= C(-1)^l D \\ A(b^l + a^{2l+1}b^{-l-1}) &= C(-1)^l D - CDa^{l+1}b^{-l-1} \end{aligned}$$

al despejar A e insertarlo en $B(A)$ y simplificar, obtenemos

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{-a^{l+1} + (-1)^l b^{l+1}}{-a^{2l+1} + b^{2l+1}} \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx \\ B_l &= \frac{a^{l+1}b^{2l+1} - (-1)^l a^{2l+1}b^{l+1}}{-a^{2l+1} + b^{2l+1}} \frac{2l+1}{2} V \int_0^1 P_l(x) dx \end{aligned}$$

con lo que la solución final sería

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{2} \sum_l (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \frac{(a^{l+1} - (-1)^l b^{l+1})r^l - ab(a^l b^{2l} - (-1)^l a^{2l} b^l)r^{-l-1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

la integral se puede hacer utilizando identidades de los polinomios de Legendre (Weber, Arfken):

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_0(x) dx &= \int_0^1 dx = 1; \quad l = 0 \\ \int_0^1 P_l(x) dx &= \frac{1}{2l+1} \int_0^1 \frac{d}{dx} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)] dx; \quad l > 0 \\ &= \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)]_0^1 = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)] \end{aligned}$$

Ahora bien, $P_n(1) = 1$, con lo que

$$= \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]$$

Pero según Weber y Arfken, también $P_{2n+1}(0) = 0$, por lo que solamente sobreviven los l impares para la sumatoria. Esto transforma la solución finalmente en

$$\phi(r, \theta) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \sum_{l \text{ impar}} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)] \frac{(a^{l+1} + b^{l+1})r^l - a^{l+1}b^{l+1}(b^l + a^l)r^{-l-1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} P_l(\cos \theta)$$

4 Solución por funciones de Green

Ahora resolveremos el mismo problema por funciones de Green. Según Greiner, la solución del problema de Dirichlet para la esfera es

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \phi(r', \theta', \varphi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

La forma general es $\phi(\vec{r}) = \int \phi(\vec{r}') \partial G_D / \partial n'$. En este caso, entonces, derivamos la función de Green respecto a r' y evaluamos $r' = a$.

Para los dos hemisferios con $r = a$, tenemos

$$\phi(a, \theta', \varphi') = \begin{cases} +V, & 0 \leq \theta' < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta' \leq \pi \end{cases}$$

Ahora, hacemos $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi' = -d(\cos \theta') d\varphi'$

$$\phi_a(r, \theta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d(\cos \theta')$$

La integral para ϕ_b es muy parecida, solo que $(r^2 - a^2) \rightarrow -(r^2 - b^2)$ y los límites de integración en $\cos \theta'$ van desde -1 hasta 0 . Con ello, el potencial se vuelve entonces

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d(\cos \theta') - \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^0 \frac{b(r^2 - b^2)}{(r^2 + b^2 - 2br \cos \gamma)^{3/2}} d(\cos \theta')$$

Ahora, podemos expandir el denominador como $\frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{1}{[1 - 2\alpha \cos \gamma]}$ si definimos $\alpha = \frac{ar}{a^2 + r^2}$, y de igual manera para b y su correspondiente β . Entonces podemos expandir el denominador en potencias de α y β :

$$[1 - 2\alpha \cos \gamma] = 1 + 3\alpha \cos \gamma + \dots$$

Resolvemos ahora la integral

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \cos \gamma d(\cos \theta') = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos \theta') (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'))$$

La integral en φ se hace cero, con lo que solamente queda el primer término

$$= \cos \theta \cdot 2\pi \int_0^1 d(\cos \theta') \cos \theta' = \cos \theta \cdot 2\pi \cdot x^2 \Big|_0^1 = \pi \cos \theta$$

La otra integral es muy similar, pero debido a los límites de integración da $-\pi \cos \theta$. Con esto, la expansión queda

$$\phi(r, \theta) \approx \frac{V}{4\pi} \frac{a(r^2 - a^2)}{[r^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{V}{4\pi} \frac{b(r^2 - b^2)}{[r^2 + b^2]^{3/2}} + \frac{V}{4} \cdot 3 \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{ar \cos \theta}{(r^2 + a^2)} + \frac{V}{4} \cdot 3 \frac{b(r^2 - b^2)}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \frac{br \cos \theta}{(r^2 + b^2)}$$

Ahora, vamos a graficarla con ayuda del código que usamos anteriormente para el método de imágenes. El tamaño de las esferas es proporcional al potencial, pero esta vez, las áreas del potencial negativas aparecerán en color rojo. Reproducimos las partes más relevantes del código, incluyendo los valores de las constantes:

```

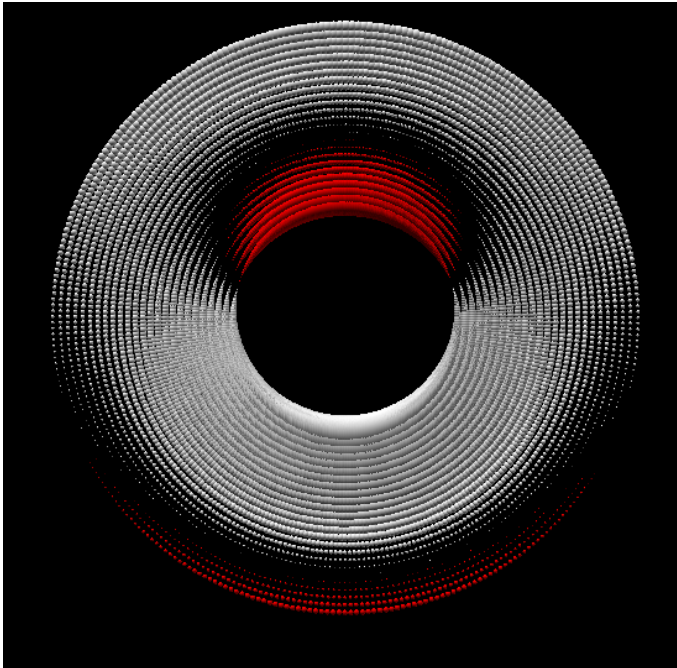
from __future__ import division
from visual import *
from numpy import arange

V = 1
a = 0.3
b = 0.8

for r in arange(a,b,0.02):
    for theta in arange(0,2*pi,0.02):
        Vt0 = V/(4*pi)*(r**2+a**2)**(-3/2)*a*(r**2-a**2) - \
            V/(4*pi)*b*(r**2-b**2)/(r**2+b**2)**(3/2)
        Vt1 = V/4*(3*a*(r**2-a**2)/(r**2+a**2)**(3/2)*a*r*cos(theta)/(r**2+a**2)\
            + 3*b*(r**2-b**2)/(r**2+b**2)**(3/2)*b*r*cos(theta)/(r**2+b**2))
        Vt = (Vt0+Vt1)*0.2
        sphere(radius=abs(Vt),pos=vector(r*sin(theta),0,r*cos(theta)))

```

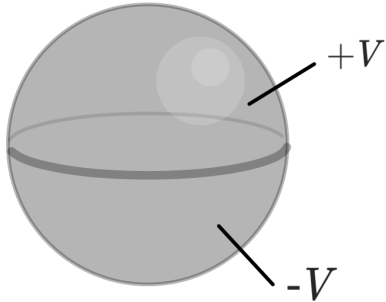
Y el resultado es



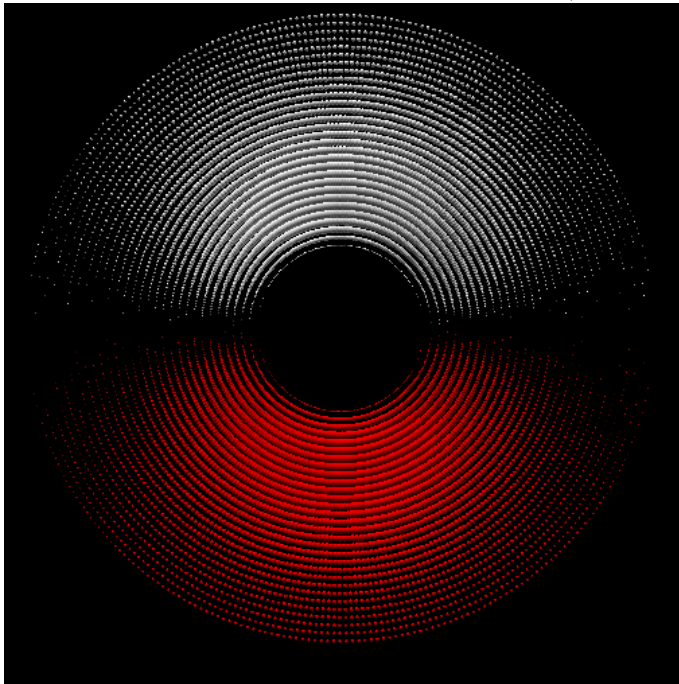
Notemos que hay partes en rojo en el resultado (puntos donde el potencial es negativo), cuando lo correcto sería no tener ningún punto rojo, pues el potencial V es positivo en nuestro código. Esto

es de esperarse, puesto que el desarrollo en serie supone que α y β son pequeñas, y eso ocurre si $r \gg a$ y $r \ll b$. Al añadir términos de mayor orden se irán corrigiendo los potenciales alrededor de las esferas. Sin embargo, aún así es posible ver que en efecto, el potencial de la parte inferior de la esfera con radio a se parece mucho al hemisferio que calculamos anteriormente con la función de Green. Si bien es cierto este hemisferio tiene un potencial V , igual que el hemisferio superior de radio b , el inferior posee más densidad de carga por tener una curvatura menor.

5 Corrida de prueba: hemisferios con potenciales $+V$ y $-V$



Una corrida de prueba fue hecha también para verificar la correcta graficación del código, hemos puesto el potencial que aparece en Jackson y Greiner para el problema de dos hemisferios pero con potenciales $+V$ y $-V$ respectivamente. Como la situación es más simétrica que en el caso anterior, se obtiene más rápidamente un resultado satisfactorio (con menos términos de la expansión). Para este caso, el potencial fue expandido hasta orden 3 (el orden 2 se anula)



6 Referencias

- Greiner, W. (1998). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-387-94799-X
- Franklin, J. (2005). *Classical electromagnetism*. ISBN 0-8053-8733-1
- Korn, G.; Korn, T. (1968). *Mathematical handbook for scientists and engineers*. ISBN 0-486-41147-8
- Jackson, J. (1975). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-471-43132-X
- Weber, H.; Arfken, G. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. ISBN 0-12-059877-9
- Para información sobre Python y VPython y una explicación más detallada sobre las simulaciones, <http://gandreoliva.url.ph/cursos.html>