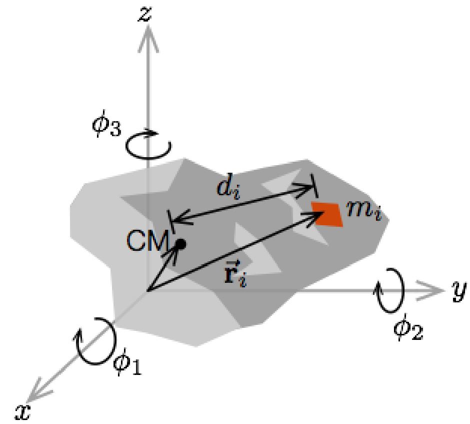
TEC Tecnológico de Costa Rica

GANDRĒOLIVA

FÍSICA GENERAL I
ROTACIONES

André Oliva, BSc
Instituto Tecnológico de Costa Rica

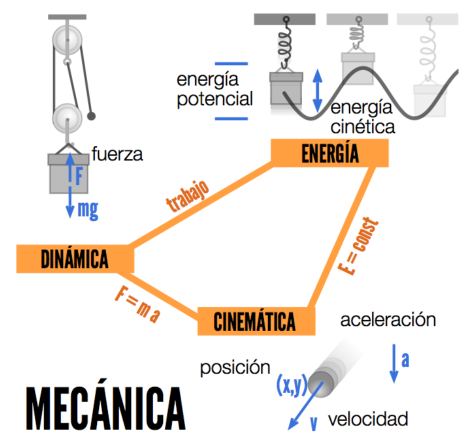
1 Cinemática rotacional



1.1 Sólido rígido

Un **sólido rígido** es un sistema de partículas unidas de forma que la distancia relativa entre ellas siempre es la misma.

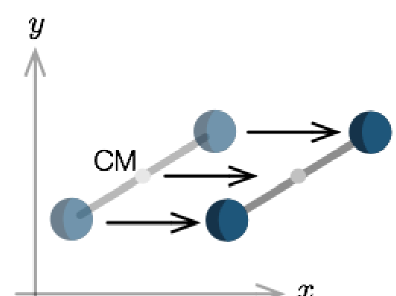
Como la posición relativa de cada partícula respecto a las demás es la misma, para describir la posición de un sólido rígido hacen falta solamente *seis* variables: la posición de su centro de masa (x, y, z), y la orientación angular del objeto en el espacio (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).



1.2 La maquinaria teórica de la mecánica

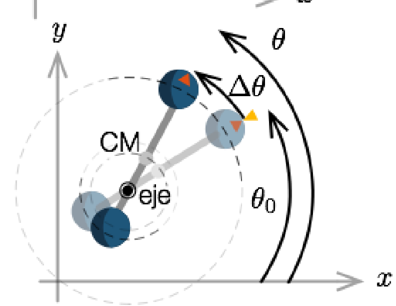
Hemos visto para partículas cómo funciona la maquinaria de la mecánica clásica. La cinemática describe el movimiento, con la posición, velocidad y aceleración, aunque no explica sus causas. La dinámica introduce el concepto de fuerza para explicar el movimiento. Luego, utilizamos energía para hacer cálculos en varias situaciones. Finalmente, vimos la interacción de varias partículas independientes.

Vamos a aplicar la misma maquinaria para el movimiento rotacional, aunque en diferente orden. Primero, vamos a describir el movimiento con cinemática rotacional. Luego, utilizaremos el concepto de energía rotacional. Más adelante explicaremos las causas de las rotaciones con dinámica rotacional, y por último, pondremos varios cuerpos sólidos rígidos a interactuar.



1.3 Descripción del movimiento

Todo movimiento de un sólido rígido lo podemos separar en *traslación* y *rotación*. La traslación es el movimiento de las partículas de forma que todas se muevan paralelamente entre sí. La rotación es el movimiento circular de todas las partículas de forma que tengan un centro en común.



Consideremos un bastón hecho de dos partículas idénticas unidas por una varilla sin masa. El centro de masa, como sabemos, está a medio camino de la varilla, como en la figura. Si trasladamos el bastón, ambas partículas se mueven de la misma forma, y el centro de masa también se mueve igual. Por eso, para describir una traslación, necesitamos solamente describir cómo se mueve el centro de masa.

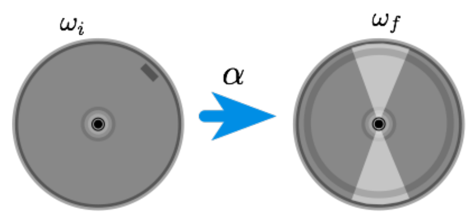
Consideremos ahora que el bastón rota alrededor de un eje. Un **eje de rotación** es una recta que sirve de centro común al movimiento circular que tienen todas las partículas del sólido rígido. Marcamos un punto del bastón, como está en la figura, y otro punto fijo fuera del bastón. Medimos los ángulos desde el eje x, siempre en contra de las manecillas del reloj para ángulos positivos. El ángulo que hace el punto inicial con el eje x lo llamamos θ_0. El ángulo que hace el punto sobre el bastón al final de la rotación lo llamamos θ. Estas son **posiciones angulares**, pues pueden ser *positivas, negativas o cero*. El **desplazamiento angular** $\Delta\theta$ lo definimos como

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

Si llamamos a la duración del tiempo que tomó rotar el bastón Δt, la **velocidad angular media** es

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La diferencia con la *rapidez angular* es que la velocidad angular puede ser positiva, negativa o cero. Como para una partícula, si tomamos el límite cuando Δt es cero, obtenemos la **velocidad angular instantánea**

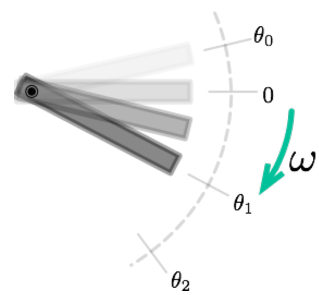


$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Si tenemos una rueda que no gira ($\omega_i = 0$), y luego la ponemos a girar a una velocidad angular ω_f, para que la rueda pase de estar quieta a rotar, necesitamos una aceleración angular α. Definimos la aceleración angular como el cambio de la velocidad angular en el tiempo:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Si la rueda se mueve a favor de las manecillas del reloj, α es positiva si la rueda acelera, y negativa si desacelera.



1.4 Movimiento circular uniforme

De igual manera que en mecánica para una partícula, podemos integrar $d\theta/dt = \omega = const$ para obtener la ecuación angular del movimiento circular uniforme:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Como cada partícula se mueve siguiendo un movimiento circular uniforme, para cada partícula del sólido rígido, la **velocidad tangencial** es

$$v = \omega r$$

En coordenadas polares, es $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\boldsymbol{\theta}} = \omega r\hat{\boldsymbol{\theta}}$. La velocidad no tiene componente radial, porque el radio es constante.

La aceleración que sufre cada partícula m_i que forma el sólido rígido es la aceleración centrípeta, $a_c = v^2/r = \omega^2 r$, en dirección radialmente hacia adentro.

Ejemplo 1.1. *Varilla.*

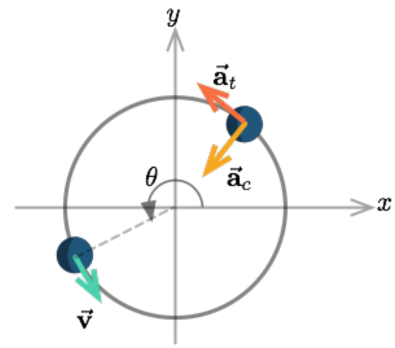
Para una varilla que gira como en la figura, queremos calcular el período de su rotación. En ángulo en el que empezamos la medición es $\theta_0 = -0.5\,\mathrm{rad}$, y el ángulo $\theta_1 = +0.8\,\mathrm{rad}$. Este movimiento tarda 2 s.

Para calcular el periodo de rotación, debemos calcular la velocidad angular:

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{0.8 - 0.5}{2} = 0.15\,\mathrm{rad/s}$$

como $\omega = 2\pi/T \implies T = 2\pi/\omega = 41.89\,\mathrm{s}$

1.5 Movimiento circular uniformemente acelerado



Vamos a hacer algo que no habíamos hecho hasta ahora, y es dar una aceleración tangencial a una partícula que se mueve en círculos. Si la partícula acelera angularmente de forma uniforme, debemos integrar la ecuación $d^2\theta/dt^2 = \alpha = const$ tal y como lo hicimos para una partícula en movimiento rectilíneo uniformente acelerado. Las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado son

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

La aceleración en la dirección tangente al movimiento es

$$a_t = r\alpha = r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

pero como ya sabemos del movimiento circular uniforme, hay además aceleración centrípeta instantánea:

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

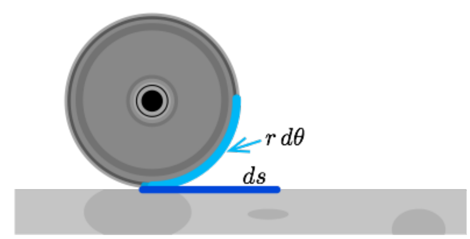
por lo que la aceleración tiene dos componentes: una centrípeta y otra tangencial. En coordenadas polares,

$$\vec{\mathbf{a}} = a_t\hat{\boldsymbol{\theta}} + a_c\,\hat{\mathbf{r}} = \alpha r\hat{\boldsymbol{\theta}} + \omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}}$$

con lo que la magnitud de la aceleración es

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2}$$

1.6 Rodamiento sin resbalar: condición cinemática

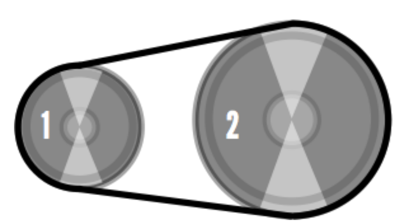


Para que un objeto ruede sin resbalar en una superficie, la condición es que su desplazamiento tangencial entre la superficie y el cuerpo sea el mismo. Es decir, si untamos de pintura una rueda como la de la figura, $ds = rd\theta$ tanto para la rueda como para la superficie. Si dividimos entre dt a ambos lados,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt} \implies v = \omega r$$

Si tenemos un disco rodando, por ejemplo, la condición de rodamiento sin deslizamiento sería que

$$v_{CM} = r\omega = v_{\text{tang}}$$



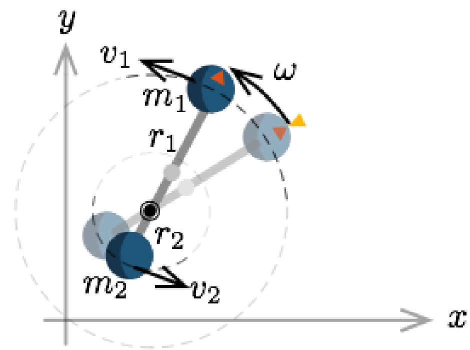
Ejemplo 1.2. *Máquina.*

Una máquina consta de dos ruedas unidas por una banda transportadora por la que ambas ruedan sin deslizar. La rueda 1 tiene un radio de 1 m, y la rueda 2, un radio de 2 m. La velocidad de una partícula en la banda transportadora al principio es de 0.3 m/s. Calcule el tiempo que necesita la rueda 1 para alcanzar una velocidad angular de 3 rad/s, si la aceleración angular de la rueda 2 es de 2 rad/s^2.

Para que haya rodamiento sin deslizamiento, $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. También, $a = \alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$. La velocidad angular inicial de 1 es $\omega_{10} = v_0/r_1 = 0.3$. La aceleración de 1 es $\alpha_1 = \alpha_2 r_2/r_1 = 4$. Con esto, tenemos

$$t = \frac{\omega_1 - \omega_{10}}{\alpha_1} = 0.68\,\mathrm{s}$$

2 Energía rotacional



2.1 Energía cinética rotacional

Para un sistema de partículas que rota como el de la figura, podemos calcular la energía cinética total del sistema como la suma de las energías cinéticas de cada partícula:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Como ambas partículas forman un sólido rígido, tienen la misma rapidez angular ω. Entonces, su energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \omega^2$$

donde r_1 y r_2 son las *distancias perpendiculares* de cada partícula al eje de rotación, que no necesariamente debe pasar por el centro de masa. Podemos factorizar la expresión anterior para obtener

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2$$

Finalmente, si la velocidad angular es constante, K es también la energía cinética del sistema como un todo, porque la fuerza centrípeta no hace trabajo, y el trabajo (si lo hay) de las fuerzas de reacción se cancela al sumar para todo el sistema.

Si tenemos varias partículas, sumamos la energía cinética de cada una, $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$

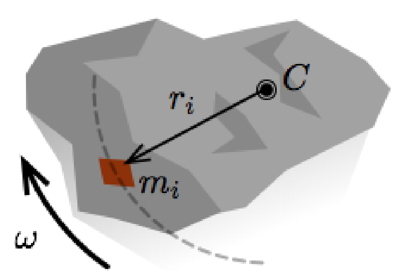
$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$$

pero como sabemos, para una rotación pura, la velocidad es $v_i = r_i\omega$. Todas las partículas que forman el sólido rígido tienen la misma velocidad angular ω. Entonces,

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

2.2 Momento de inercia

A la suma del final la llamamos **momento de inercia** I alrededor de un eje C:



$$I_C = \sum_i m_i r_i^2$$

Para un cuerpo extendido, formado por infinitas partículas, convertimos la suma en una integral:

$$I_C = \int r^2\, dm$$

El momento de inercia I_C depende de:

- La forma del objeto
- La densidad o distribución de masa en el objeto
- El eje de rotación

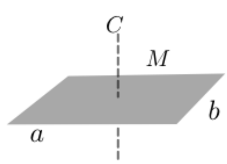
Vamos a calcular momentos de inercia para varias figuras más adelante. Por ahora, usaremos resultados que alguien más ya ha calculado.

El momento de inercia es un escalar, por lo que es un número > 0, < 0, $= 0$. Si tenemos dos sólidos rígidos unidos que rotan alrededor del mismo eje, podemos simplemente sumar los momentos de inercia para obtener el momento de inercia total del sistema. En general, no podemos sumar momentos de inercia medidos en diferentes ejes.

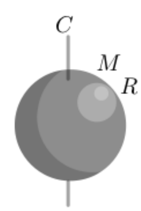
Sabiendo el momento de inercia, la energía cinética de rotación es

$$K = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

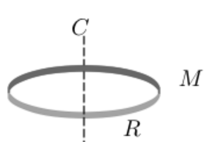
2.3 Tabla de momentos de inercia



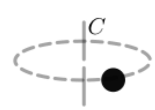
$$I_C = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



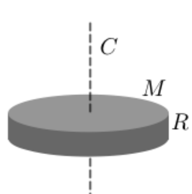
$$I_C = \frac{2}{5} MR^2$$



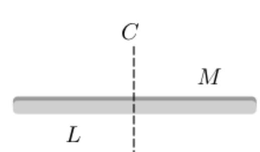
$$I_C = MR^2$$



$$I_C = MR^2$$



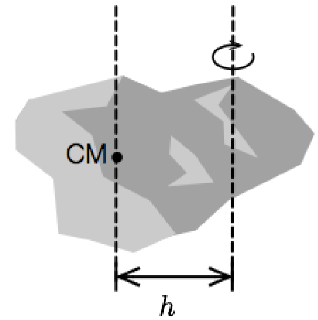
$$I_C = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I_C = \frac{1}{12} ML^2$$

La esfera que se muestra es sólida; el cascarón esférico tiene un momento de inercia de $(2/3)MR^2$ en la misma situación.

2.4 Teorema de ejes paralelos



Supongamos que tenemos un cuerpo general como el de la figura, que rota alrededor del eje z, que pasa por su centro de masa, CM. entonces, el momento de inercia alrededor de su centro de masa es

$$I_{CM} = \int r_{CM}^2 dm = \int (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) dm$$

Ahora bien, supongamos que movemos el eje de rotación, a un eje z', paralelo a z, que se encuentra a una distancia h del mismo, medida desde el eje x. Entonces, el momento de inercia alrededor del nuevo eje sería

$$I' = \int (x_{CM} + h)^2 dm + \int y_{CM}^2 dm$$

desarrollando

$$I' = \int x_{CM}^2 dm + 2h \int x_{CM} dm + h^2 \int dm + \int y_{CM}^2 dm$$

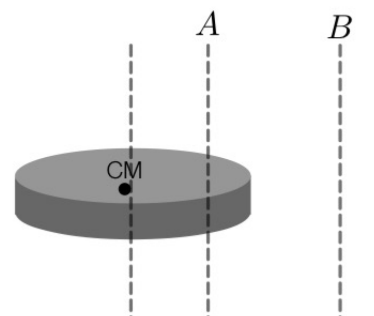
Ahora, veamos la integral $\int x_{CM} dm$ esta era nuestra definición del centro de masa de un sistema, por lo que $\int x_{CM} dm = (x_{CM})_{CM}$. Pero esto es la posición del centro de masa medida desde el centro de masa, por lo que esa integral es cero, por lo tanto,

$$I' = \int x_{CM}^2 dm + h^2 \int dm + \int y_{CM}^2 dm$$

$$I' = \int r_{CM}^2 dm + h^2 M$$

y nos queda el **teorema de ejes paralelos**:

$$I' = I_{CM} + Mh^2$$



Ejemplo 2.1. *Disco.*

Tenemos un disco, de masa $m = 2\,\text{kg}$, que gira alrededor de un eje A, a $1\,\text{m}$ de su centro, con un momento de inercia de $I_A = 9\,\text{kg m}^2$. Calcule el momento de inercia alrededor de un eje B que se encuentra a $2\,\text{m}$ de A.

Hay que tener un enorme cuidado, porque el teorema de ejes paralelos no funciona para dos ejes cualquiera, sino que uno de ellos debe ser el eje que pasa por el centro de masa. Por eso, primero debemos averiguar el momento de inercia del centro de masa:

$$I_A = I_{CM} + mh_A^2 \implies I_{CM} = 6\,\text{kg m}^2$$

Una vez tenemos el momento de inercia del centro de masa, usamos nuevamente el teorema de ejes paralelos para hallar el momento de inercia alrededor de B:

$$I_B = I_{CM} + mh_B^2 = 33\,\text{kg m}^2$$

2.5 Teorema de ejes perpendiculares

Si tenemos una placa delgada en el plano xy, su momento de inercia alrededor del eje z será

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

Como la placa es delgada, si la rotamos alrededor del eje y tendremos

$$I_y = \int x^2 dm$$

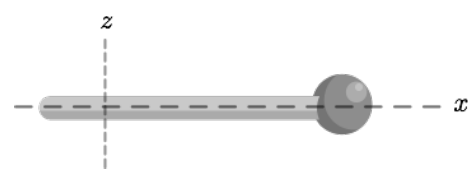
puesto que x es la distancia hasta el eje y. Si la giramos alrededor del eje x, tendremos

$$I_x = \int y^2 dm$$

por lo que

$$I_z = I_x + I_y$$

siempre y cuando la placa sea delgada, pero funciona para cualquier forma de la placa.



Ejemplo 2.2. *Bastón.*

Una varilla y una esfera sólida se unen para formar un bastón. La varilla tiene largo L, masa m, y la esfera tiene masa M y radio R. Encuentre el momento de inercia a) alrededor de un eje z, a una distancia a del extremo izquierdo de la varilla, y b) alrededor del eje z. La varilla es delgada.

Para el caso (a), primero calculemos el momento de inercia de la varilla con ejes paralelos:

$$I_{\text{varilla}} = \frac{mL^2}{12} + m(L/2 - a)^2$$

para la esfera,

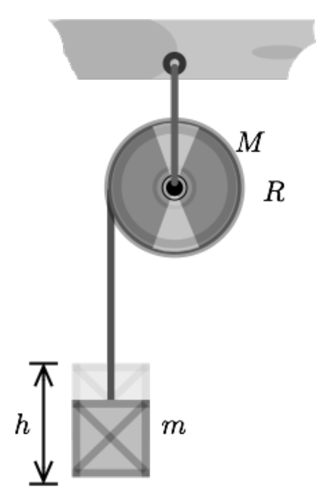
$$I_{\text{esfera}} = \frac{2}{5}MR^2 + M(L - a + R)^2$$

el momento de inercia del bastón es, entonces,

$$I_z = \frac{mL^2}{12} + m(L/2 - a)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M(L - a + R)^2$$

Para el caso (b), el momento de inercia de la varilla es cero, porque como la varilla es delgada, la distancia perpendicular de todos sus puntos con el eje x es cero. Para la esfera, el momento de inercia es el mismo de su centro de masa. Por lo tanto, el momento de inercia alrededor del eje x es

$$I_x = \frac{2}{5}MR^2$$



Ejemplo 2.3. *Cabrestante o malacate.*

Un cabrestante de masa M y radio R se libera desde el reposo de forma que su peso, que consiste en una caja de masa m caiga, rotando el cabrestante. Después de caer una altura h, calcule la velocidad de la caja. Considere que el cable no tiene masa y que rueda sin deslizar en el cabrestante.

Por conservación de la energía

$$K_{rot,M} + K_m + U_m = K'_{rot,M} + K'_m$$

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

pero $I = MR^2/2$, y como la cuerda rueda sin deslizar sobre el cabrestante, $v = \omega R$, con lo que

$$mgh = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2$$

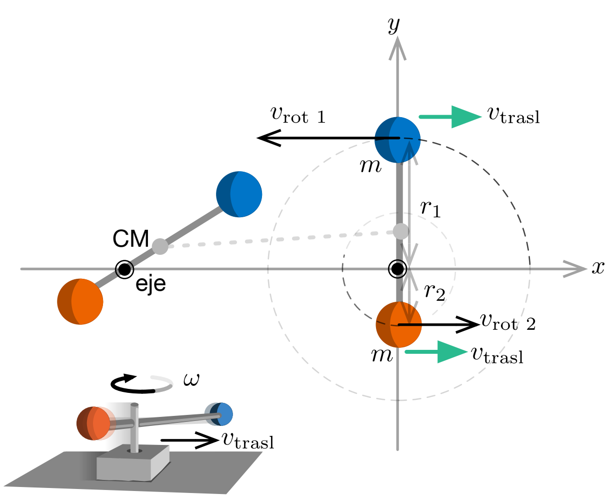
de donde, despejando v,

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{M/4 + m/2}}$$

Si el cabrestante no tuviera masa, la velocidad se convierte a caída libre, $v = \sqrt{2gh}$, por lo que el hecho de que haya un objeto rotando reduce la energía cinética.

2.6 Movimiento traslacional y rotacional

Considere un aparato como el de la figura, que consiste en dos masas iguales m conectadas por una varilla de masa despreciable, que giran alrededor de un eje móvil que no pasa por el centro de masa del sistema (distancias respectivas al eje: r_1, r_2), y que se desliza por una mesa sin fricción con una velocidad de traslación v. Queremos encontrar la energía cinética del sistema.



Primero que nada, observe que el bastón gira alrededor de un **eje forzado**, es decir, un eje que no pasa por el centro de masa. ¿Por qué se llama forzado? Observe que las partículas 1 y 2 tendrán velocidades tangenciales diferentes, porque giran en círculos de diferentes radios. Eso implica que tendrán fuerzas centrípetas (radiales) diferentes. Pero como el bastón es rígido, la única opción es que en el eje se aplique una fuerza adicional que compense la diferencia.

Ahora calculemos la energía cinética del sistema. La velocidad rotacional tangencial de cada partícula es $v = \omega r$; ω es igual para ambas (ambas completan una rotación al mismo tiempo), pero r es diferente. La velocidad traslacional es igual para ambas partículas. La velocidad total de la partícula 1 es, entonces,

$$v_{\text{total 1}} = -\omega r_1 + v_{\text{trasl}}$$

La velocidad total para la partícula 2 es

$$v_{\text{total 2}} = \omega r_2 + v_{\text{trasl}}$$

Entonces, la energía cinética total para cada partícula será:

$$K_1 = \frac{1}{2}m(-\omega r_1 + v_{\text{trasl}})^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2 r_1^2 - 2\omega r_1 v_{\text{trasl}} + v_{\text{trasl}}^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m(\ \ \omega r_2 + v_{\text{trasl}})^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2 r_2^2 + 2\omega r_2 v_{\text{trasl}} + v_{\text{trasl}}^2)$$

Ahora examinemos:

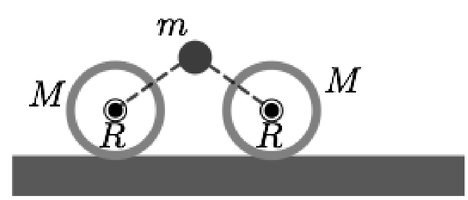
Los primeros términos de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}(mr_1^2 + mr_2^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, la cual es la energía cinética rotacional.

Los últimos términos de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}mv_{\text{trasl}}^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{trasl}}^2$, la cual es la energía cinética traslacional total.

Los términos de en medio de cada uno suman para formar $\frac{1}{2}(2m)\omega v_{\text{trasl}}(-r_1 + r_2)$. Observe que si y solo si el cuerpo gira alrededor del centro de masa, $r_1 = r_2$, y los términos se cancelan.

Solo si los términos de en medio se cancelan, es decir, *solo si la rotación es alrededor de un eje que pase por el centro de masa*

$$K_{\text{total}} = K_{\text{trasl}} + K_{\text{rot}}$$



Ejemplo 2.4. *Bicicleta.*

Calcule el trabajo que debe hacer un ciclista para mover su bicicleta desde el reposo hasta una velocidad v.

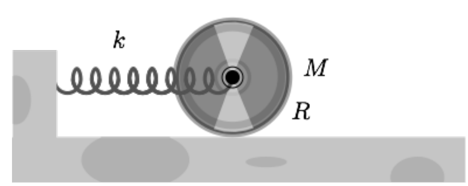
Usemos el teorema de trabajo-energía cinética, $W = \Delta K$. La energía cinética inicial es cero porque el ciclista partió desde el reposo. Hay que tomar en cuenta la energía cinética traslacional de las dos ruedas, traslacional de las dos ruedas y traslacional del resto de la bicicleta y ciclista m:

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}Mv^2$$

El momento de inercia de un aro alrededor de su centro de masa es $I = MR^2$. Si la bicicleta se mueve rodando sin deslizar, la velocidad de su centro de masa v debe ser su misma velocidad tangencial ωr:

$$W = MR^2\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 + Mv^2$$

$$W = 2Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$



Ejemplo 2.5. *Rueda y resorte.*

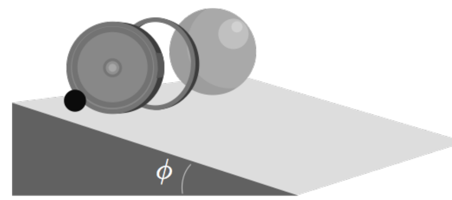
Un disco viene rodando desde la derecha de la figura con una rapidez v, y se engancha su centro en un resorte. Si el disco siempre rueda sin deslizar, calcule la compresión máxima del resorte.

Usamos conservación de la energía: toda la energía cinética (rotacional y traslacional) del disco se convertirá en energía potencial del resorte. Por eso,

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

sustituyendo $v = \omega R$ e $I = MR^2/2$, obtenemos

$$x = \sqrt{\frac{MR^2(v/R)^2/2 + Mv^2}{k}} = \sqrt{\frac{3Mv^2}{2k}}$$



Ejemplo 2.6. *Carrera de objetos.*

Los objetos de la figura se sueltan desde una altura h en un plano inclinado, rodando sin resbalar. ¿Cuál es el orden de llegada hasta el fondo?

Por conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

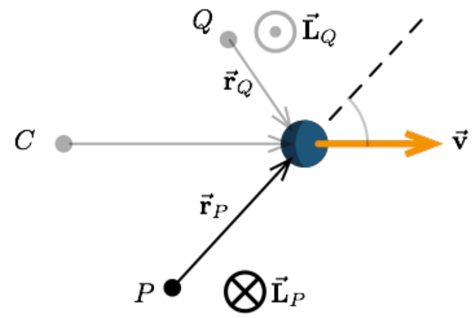
Ahora bien, vamos a escribir $I = cmR^2$, con $c = 0$ para la partícula, $c = 1$ para el aro, $c = 1/2$ para el disco y $c = 2/5$ para la esfera sólida. Ademas, sustituimos la condición de rodamiento sin resbalar, $v = \omega R$:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}cmR^2\frac{v^2}{R^2}$$
$$2mgh = mv^2 + cmv^2$$
$$2gh = v^2(1+c)$$
$$\implies v = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

La velocidad es inversamente proporcional al momento de inercia, por lo que quien tenga menor momento de inercia llega antes. Por lo tanto, primero llega la partícula que se desliza, luego la esfera, después el disco y por último el aro.

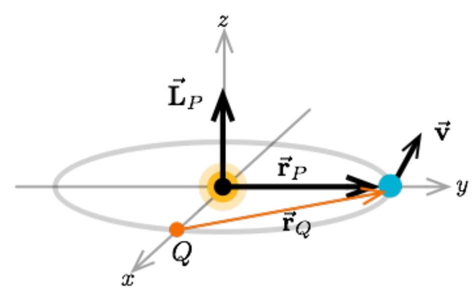
3 Dinámica rotacional

3.1 Moméntum angular



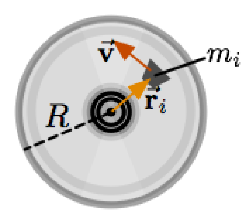
El moméntum angular es una cantidad física que depende del punto de referencia (no es intrínseca al cuerpo). El moméntum angular $\vec{\mathbf{L}}$ respecto a P se define como

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \vec{\mathbf{r}}_P \times \vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{r}}_P \times \vec{\mathbf{v}}$$



donde $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ es el moméntum (lineal) de la partícula. $\mathcal{U}[L, SI] = \text{kg m}^2/\text{s}$ En la figura vemos, por ejemplo, que si el plano de la posición y la velocidad es el plano xy, en P, el moméntum angular va en dirección $-\hat{\mathbf{z}}$, pero en Q, el moméntum angular va en dirección $+\hat{\mathbf{z}}$, e incluso, en C, el moméntum angular es cero (vector nulo).

Consideremos la Tierra moviéndose alrededor del Sol. Observemos que, alrededor del origen, el vector moméntum es el mismo siempre, pues la dirección del moméntum siempre es $+\hat{\mathbf{z}}$, y la magnitud también, pues sería $|\vec{\mathbf{L}}_P| = mvr_P \sin 90° = mRv$, y ni R ni v cambian durante la órbita. El ángulo es en todo momento $90°$, y R es el radio de la órbita. Entonces, decimos que el *moméntum angular se conserva alrededor de P*. Si tomamos otro punto, por ejemplo Q, el moméntum angular no se conserva, porque r_Q cambia. Note que $\vec{\mathbf{L}}_P = |\vec{\mathbf{L}}_P|\,\hat{\mathbf{z}}$.



Si tenemos un disco como el de la figura, que rota en un plano xy, el moméntum angular alrededor del eje de rotación C de cada partícula m_i que forma el disco es

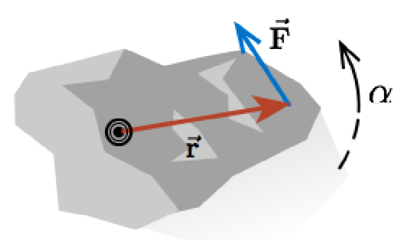
$$L_{iC,z} = m_i r_{iC} v_i$$

pero como sabemos, $v_i = \omega r_i$; con esto, el moméntum angular total del disco es

$$\implies L_{\text{disco},C,z} = \omega \sum_i m_i r_{iC}^2$$

$$L_{\text{disco},C,z} = I_C \omega$$

3.2 Torque



El **torque**[1] alrededor de un punto Q es el cambio de moméntum angular en el tiempo:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_Q = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}_Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_Q}{\mathrm{d}t} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}}_Q \times \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}$$

pero como $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son paralelos entre sí, el primer término se hace cero, con lo que queda

[1] También se llama momento de fuerza, momento de torsión o torca.

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_Q = \vec{\mathbf{r}}_Q \times \vec{\mathbf{F}}$$

que es nuestra definición de torque.

Este es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton. Si sabemos los torques que se aplican a un sistema, podemos encontrar, integrando, la posición angular en función del tiempo.

$$\sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_{i,Q} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}_Q}{\mathrm{d}t}$$

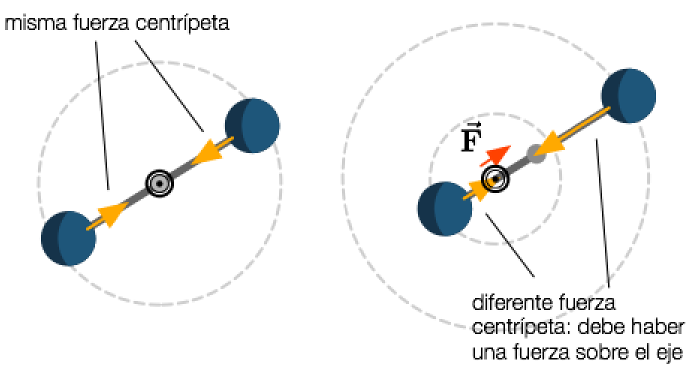
$\mathcal{U}[\tau] = \mathrm{N\,m}$. Aunque teóricamente son las mismas unidades que J, por convención siempre se usa N m. Un equivalente sería J/rad.

Para un cuerpo sólido rígido que se mueve en el plano xy, alrededor de su eje, $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \tau_z\,\hat{\mathbf{z}}$, con lo que

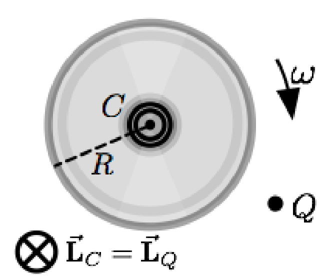
$$\tau_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\alpha$$

O sea, aquí se ve más claramente que si sabemos el torque neto sobre el cuerpo, ya sabemos, integrando, cómo rota.

3.3 Conservación del moméntum angular



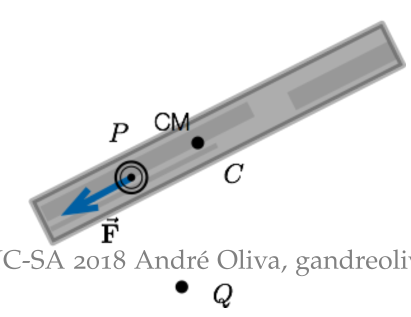
Si rotamos un cuerpo alrededor de un eje que no pasa por su centro de masa, vamos a tener una fuerza sobre ese eje. Para ver esto, consideremos primero un cuerpo rígido formado por dos masas como el de la figura. Si giramos el cuerpo alrededor de su centro de masa, la fuerza centrípeta de ambas masas debe ser la misma. Sin embargo, si lo giramos alrededor de un eje que no pasa por el centro de masa, la fuerza centrípeta es diferente, y como el centro de masa no se traslada, las fuerzas internas deben cancelarse. Esto implica que debe haber una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúe sobre el eje de rotación.



Lo anterior también implica que si aplicamos un torque a un cuerpo libre, este rotará alrededor de su centro de masa. También, que si un cuerpo gira con velocidad angular constante alrededor de su centro de masa, el torque neto es cero *alrededor de cualquier punto* porque no hay fuerzas:

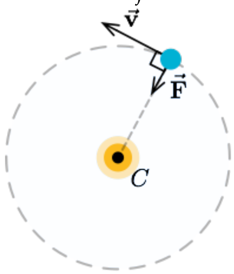
$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\boldsymbol{\tau}}_C = \vec{\boldsymbol{\tau}}_Q = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{L}}_C = \vec{\mathbf{L}}_Q = \text{const}$$

y por lo tanto, el moméntum angular se conserva *alrededor de cualquier punto*. Entonces, cuando hay una rotación alrededor del centro de masa, el moméntum angular se vuelve una **propiedad intrínseca** del objeto; ya no depende del punto de medición.

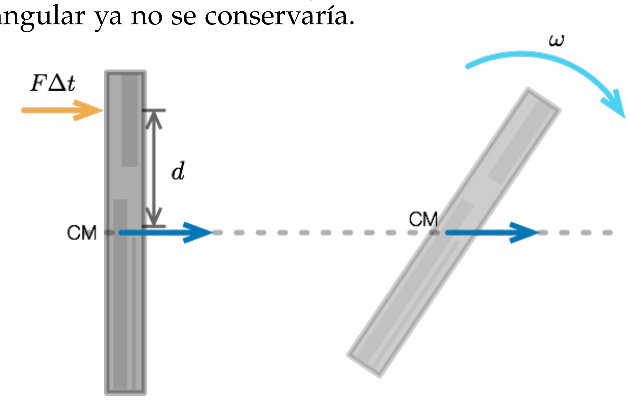


Por otro lado, cuando tenemos una barra que rota con ω constante alrededor de un eje arbitrario P, como en la figura, el torque alrededor de P es cero. Si tomamos el punto C, que corresponde al centro de masa, en este caso, también el torque es cero, porque $\vec{\mathbf{r}}_C$ y $\vec{\mathbf{F}}$ son paralelos. Pero si tomamos el punto Q, el torque ya no es cero ni constante.

Por lo tanto, en un eje arbitrario, *el moméntum angular solo se conserva alrededor del eje.*



Otro ejemplo sería la órbita de la Tierra alrededor del Sol. El moméntum angular se conserva alrededor del eje C, porque en ese punto, la fuerza siempre es paralela a la posición $\vec{\mathbf{r}}$, y por ende, el torque siempre se anula alrededor de C. Es interesante notar que el moméntum angular se conservaría incluso si la órbita no fuera circular, pues lo único que importa para que se conserve es que la fuerza vaya en la misma dirección de la posición. Si elegimos otro punto distinto de C, el moméntum angular ya no se conservaría.



Ejemplo 3.1. *Empujón a una barra.*

Suponga que tenemos una barra y le impartimos un impulso $F\Delta t$ en dirección perpendicular a la misma. Queremos saber cuál sería su movimiento completo (rotación y traslación).

La traslación es fácil, porque sabemos el concepto de centro de masa. No importa que sea un cuerpo extendido, el centro de masa se mueve como una partícula. Por lo tanto, de la segunda ley de Newton,

$$F\Delta t = Ma_{CM}\Delta t$$

pero $v_{CM} = a_{CM}\Delta t$, por lo que

$$v_{CM} = \frac{F\Delta t}{M}$$

La rotación, por otro lado, la encontramos con

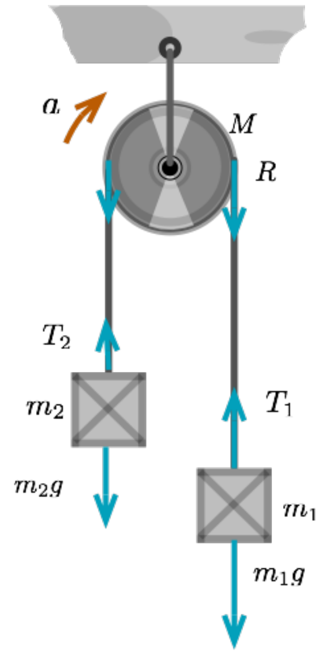
$$\tau_{CM} = \frac{\Delta L_{CM}}{\Delta t} \implies \Delta L_{CM} = \tau_{CM}\Delta t$$

El moméntum angular antes era cero, y después, $I_{CM}\omega$ por lo que

$$I_{CM}\omega = F\Delta t\, d \implies \omega = \frac{F\Delta t\, d}{I_{CM}}$$

Y si empujamos la barra en su centro de masa, $d = 0$ y la barra solamente se traslada.

Note que empujarla en $d = 0$ requiere menos energía que empujarla con la misma fuerza en $d > 0$.



Ejemplo 3.2. *Polea con masa.*

Si tenemos una máquina de Atwood en la que hay una polea con masa, la tensión de la cuerda no es uniforme. Esto es debido a que al tener masa, la polea ahora debe rotar, y consume parte del moméntum que lleva la fuerza de tensión. Otra manera de entenderlo es con energías, tal y como lo vimos con el cabrestante: la polea consume energía, por lo que ahora las cajas de la máquina de Atwood se mueven con menos aceleración. Queremos calcular la magnitud de la aceleración de las cajas y la aceleración angular de la polea.

Suma de fuerzas en la caja 1, dirección y:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

Suma de fuerzas en la caja 2, dirección y:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

pero $a_2 = -a_1 = a$, con lo que

$$\begin{cases} T_2 - m_2 g = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = -m_1 a \end{cases}$$

Suma de torques en z alrededor del punto O:

$$\sum \tau_{z,O} = I_O \alpha$$

de la tabla, $I_O = \frac{1}{2}MR^2$, y puesto que suponemos que la cuerda pasa sin deslizar por la polea, $a = \alpha R$.

$$-T_1 R + T_2 R = I_O \frac{a}{R}$$

$$\implies -T_1 R^2 + T_2 R^2 = \frac{1}{2} M R^2 a$$

$$\implies -T_1 + T_2 = \frac{Ma}{2}$$

de las otras ecuaciones despejamos T_1 y T_2 e introducimos en esta última ecuación,

$$m_1 a - m_1 g + m_2 a + m_2 g = \frac{Ma}{2}$$

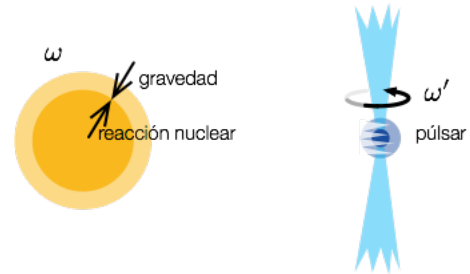
$$\implies a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 - M/2} g$$

si las masas son iguales, la aceleración se anula, como es de esperarse. Además, si la polea no tiene masa, recuperamos el resultado de la máquina de Atwood para poleas sin masa. La aceleración angular de la polea es

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 - M/2} g$$

Ejercicio: calcule las dos tensiones de la cuerda.

Ejemplo 3.3. *Colapso estelar.*



Al final de su vida, las estrellas pueden tener tres tipos de finales: como una enana blanca ($M < 1.4M_\odot$), estrella de neutrones ($1.4M_\odot < M < 2.5M_\odot$) o agujero negro ($M > 2.5M_\odot$), donde M es la masa de la estrella al final de su vida y $M_\odot$ es la masa de nuestro Sol. El Sol acabará como una enana blanca.

Durante la mayor parte de la vida de una estrella, la fuerza que produce la reacción nuclear en su interior contrarresta la gravedad, que atrae las partículas de la estrella hacia su centro. Cuando el combustible para la reacción nuclear (hidrógeno) se termina, la estrella colapsa, es decir, solamente actúa la gravedad. Las estrellas rotan alrededor de un eje que pasa por su centro de masa. Supongamos que la velocidad angular con la que una estrella rota es ω durante su vida estable. Cuando colapsa, su momento de inercia cambia, pues cambia su radio, de R a R'. Como no hay torques externos, el moméntum angular de la estrella se conserva. Por lo tanto, la nueva velocidad angular es

$$I\omega = I'\omega'$$

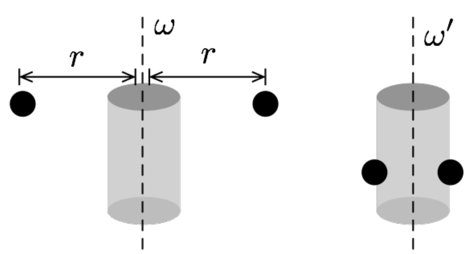
$$\frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5}MR'^2\omega'$$

$$\implies \omega' = \frac{\omega R^2}{R'^2}$$

Si una estrella se convierte en una estrella de neutrones, su radio disminuye drásticamente, unos 3 órdenes de magnitud: $R = 10^3 R'$. Eso implica que su velocidad angular aumentará por un factor de 10^6. Una estrella como el Sol rota alrededor de su eje cada ~ 25 días $\sim 2 \cdot 10^6$ s. Como $\omega = 2\pi/T$, su periodo se disminuye por un factor de 10^6, por lo que completaría una vuelta cada 2 s.

Los púlsares son estrellas de neutrones que emiten radiación. La radiación no se emite necesariamente en la línea del eje de rotación, por lo que desde la Tierra observamos que la radiación va y viene. Los períodos de rotación de los púlsares son increíblemente altos, y permanecen bastante estables.

Ejemplo 3.4. *Patinadora.*



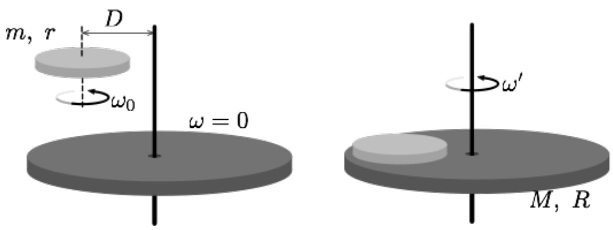
Aproximemos una patinadora como un cilindro sólido de radio R y masa M, y simplifiquemos sus brazos de forma que sean como partículas de masa m, de forma que $M >> m$. La distancia de estiramiento de los brazos es r. Cuando una patinadora da vueltas con los brazos estirados y luego junta los brazos, su velocidad angular aumenta, porque como vimos en el ejemplo del colapso estelar, el moméntum se conserva en el objeto siempre que no haya torques externos. Entonces, el moméntum angular de la patinadora antes de juntar los brazos sería

$$L = I_{\text{total}}\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + 2mr^2\right)$$

el 2 viene de sumar ambos brazos. El moméntum angular al final debe ser

$$L' = I'_{\text{total}}\omega' = \frac{1}{2}MR^2\omega'$$

puesto que $M >> m$. Como $L = L'$ podemos despejar ω', aunque claramente va a ser mayor que ω, porque claramente disminuye I' respecto a I.



Ejemplo 3.5. *Colisión rotacional.*

Si tenemos varios cuerpos sólidos rígidos, podemos formar un sistema con ellos. De manera análoga a los sistemas de partículas,

$$\sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{total}}}{dt}$$

Un disco de masa M y radio R se encuentra en reposo, y hay un eje fijo que pasa exactamente por su centro. Otro disco de masa m y radio r se encuentra a una distancia centro-centro D del primer disco. El segundo disco rota con una rapidez angular ω_0. Ambos discos colisionan, de forma que sus rapideces angulares son la misma al final, ω'. Encuentre ω'.

El moméntum angular se conserva porque no hay torques externos en el sistema de ambos discos. Al inicio, tenemos un moméntum angular intrínseco del disco pequeño, por lo que $\vec{\mathbf{L}}$ alrededor de cualquier punto es el mismo. Al final, el eje fijo del disco grande obliga a que el sistema gire alrededor de él, por lo que hay fuerzas sobre el eje. Ya hemos visto que lo que conviene es usar el punto del eje. Entonces, en el eje fijo, el moméntum angular inicial es:

$$\vec{\mathbf{L}} = I_{\text{peq}}\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}$$

Moméntum angular final:

$$\vec{\mathbf{L}}' = (I_{\text{gr}}\omega' + I'_{\text{peq}}\omega')\,\hat{\mathbf{z}}$$

Momentos de inercia:

$$I_{\text{peq}} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I'_{\text{peq}} = \frac{1}{2}mr^2 + mD^2$$

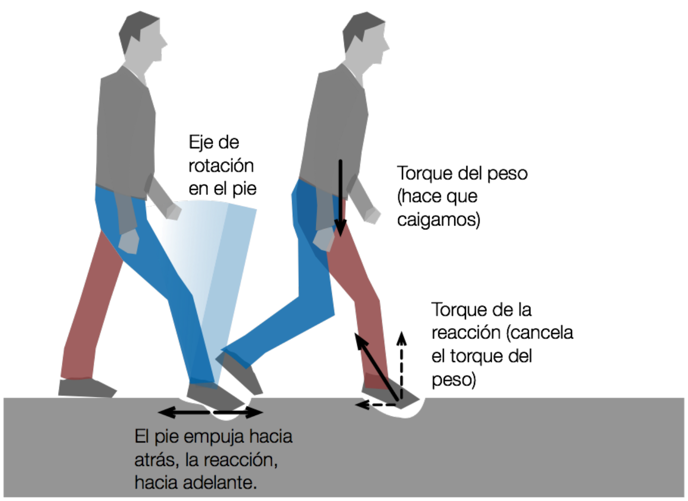
$$I_{gr} = \frac{1}{2}MR^2$$

El moméntum angular se conserva: $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}'$

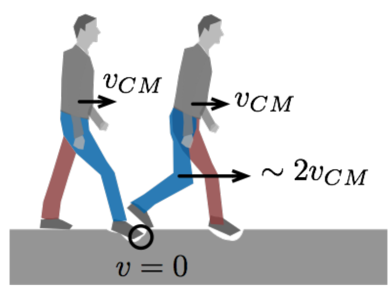
$$\frac{1}{2}mr^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + mD^2\right)\omega'$$

$$\implies \omega' = \frac{mr^2}{MR^2 + mr^2 + 2mD^2}\omega_0$$

3.4 Caminata

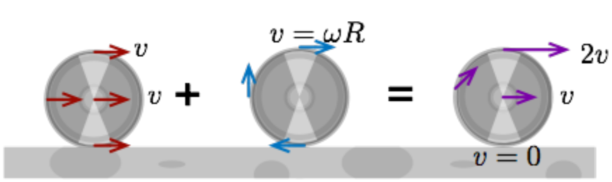


Como se observa en la figura, una persona que camina en arena se impulsa gracias a la tercera ley de Newton: el pie empuja hacia atrás, y la reacción de la arena hacia el pie impulsa a la persona hacia adelante, de forma que el eje de rotación de la pierna está en el pie: el pie se queda con velocidad $v = 0$ mientras toca la arena. Cuando la persona avanza, el torque que hace el peso, que sale del centro de masa, haría que la persona se caiga. Para evitarlo, la otra pierna actúa y el otro pie hace un torque que contrarresta el torque de la gravedad y detiene la caída.

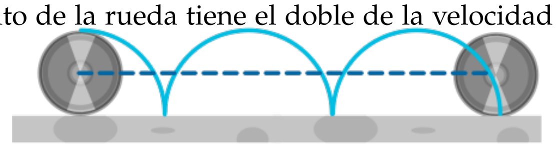


Es interesante ver qué pasa con las velocidades de varios puntos de la persona. Mientras el pie está en la arena, no se mueve, por lo que su velocidad instantánea es cero. Sin embargo, el centro de masa de la persona se mueve siempre con una rapidez más o menos constante v_{CM} mientras camina. Esto obliga al pie a moverse a más o menos el doble de la velocidad del centro de masa para compensar el tiempo que pasó apoyado en la arena.

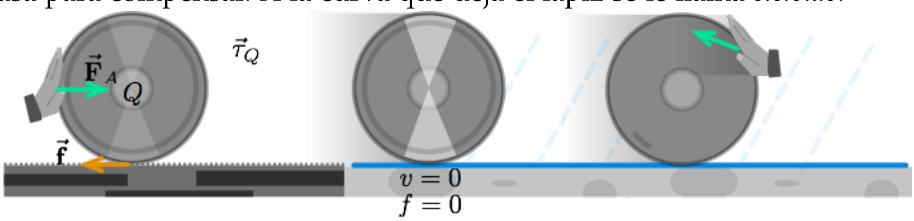
3.5 Rodamiento sin deslizar: condición dinámica



De forma parecida a la caminata, un rodamiento sin deslizamiento es una combinación de dos movimientos: uno de rotación y otro de traslación. Como se observa en la figura, el punto más bajo de la rueda permanece con velocidad instantánea cero, mientras que el punto más alto de la rueda tiene el doble de la velocidad del centro de masa.



Suponga que atamos un lápiz a un punto de una rueda, y la hacemos rodar sin deslizarse. La marca que dejaría el lápiz sería como la de la figura: mientras el lápiz está en el fondo, tiene una rapidez instantánea cero, y cuando se levanta, tiene el doble de la rapidez del centro de masa para compensar. A la curva que deja el lápiz se le llama *cicloide*.

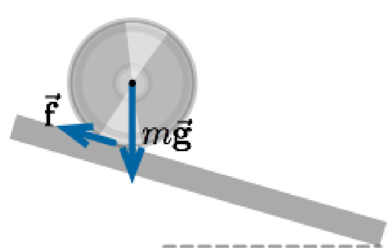


Para poner a rodar la rueda de la figura se necesita una fuerza aplicada. Supongamos que la fuerza se aplica en el punto mostrado, a la altura del centro de masa, en una superficie sin fricción. No hay torques alrededor de Q, por lo que la rueda se trasladaría sin rodar. Para poner a rodar a la rueda se requiere de la fricción $\vec{\mathbf{f}}$, que haga un torque alrededor de Q. Si la superficie no tiene fricción, la rueda patina.

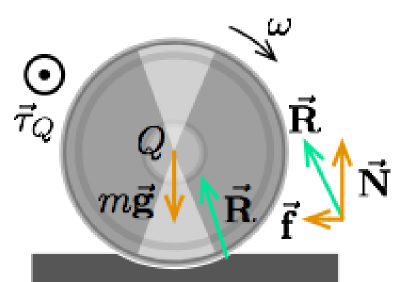
Solo se requiere la fricción mientras se aplica la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_A$. Al dejar de aplicar la fuerza, el centro de masa de la rueda debe trasladarse con movimiento rectilíneo uniforme, y además debe rotar con movimiento circular uniforme. Esto significa que la suma de fuerzas y torques sobre la rueda debe ser cero. Además, en el punto de contacto, la velocidad es cero y no hay fuerzas aplicadas, por lo que según nuestra función de fricción, la fricción debe ser cero.

Si la rueda pasa ahora por una región mojada donde la fricción sea despreciable (carro en lluvia, por ejemplo), esta seguirá rodando sin deslizar, porque la fricción no es necesaria para mantener el movimiento de rodamiento puro. Podemos entenderlo también desde la conservación del moméntum angular: como la superficie no tiene fricción, no pueden haber torques que detengan la rueda, ni fuerzas que detengan su centro de masa.

Si aplicamos una fricción solo a la rueda, tal y como la hacen los frenos de los carros, la rueda tendrá un torque que la detendrá, pero como no hay fricción entre el suelo y la rueda, el centro de masa de la rueda seguirá moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme: la rueda patina. Esto es lo que les ocurre a los carros en un día lluvioso.



Si ponemos una rueda en un plano inclinado, la fuerza aplicada al centro de masa es siempre $m\vec{\mathbf{g}}$ y no produce torques. Por lo tanto, si queremos que la rueda baje por el plano inclinado con rodamiento sin deslizar, necesitamos que el plano tenga una fricción $\vec{\mathbf{f}}$. Esta fricción tiene que ser estática, puesto que, como vimos, el punto de contacto entre el suelo y la rueda tiene rapidez instantánea cero.



En una rueda real, hay deformación entre la rueda y el suelo, que es equivalente a que el suelo se deforme con una rueda perfectamente rígida, como está en la figura. Cuando esto ocurre, hay más de un punto de contacto con el suelo, por lo que hay puntos con $v \neq 0$ en contacto con el suelo, por lo que hay fricción. Se produce una fuerza de reacción entre el suelo y la rueda, que es la suma de la normal más la fricción. Esta fuerza de reacción produce un torque alrededor de Q que va frenando la rueda, que llevaba una rapidez inicial ω.

3.6 Trabajo de un torque

Suponga una partícula que se mueve en trayectoria circular de radio r. Si se aplica una fuerza de magnitud F en dirección tangente a la trayectoria de la partícula, su trabajo es

$$W = \int F ds$$

pero ds es un diferencial de arco,

$$W = \int F r d\theta$$

Como la fuerza es tangente al círculo, es también perpendicular al radio, por lo que Fr es el torque aplicado a la partícula. Queda

$$W = \int \tau d\theta$$