Folleto de ejercicios resueltos
FI-2103: Física General III

Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo

Contenidos

Tecnológico de Costa Rica

Prólogo

Este folleto busca ser un apoyo para quienes están cursando Física General III en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

En este, el estudiante encontrará una serie de problemas resueltos para cada uno de los temas que se cubren en el curso.

Se recomienda que antes de leer las soluciones, cada estudiante intente resolver el problema por su cuenta; de manera que logre identificar sus dificultades o errores conceptuales.

Algunos de los problemas que se resuelven en este folleto, corresponde a preguntas de desarrollo que han aparecido en exámenes parciales de Física General III en el pasado; por lo que constituyen una excelente base de preparación para los exámenes que ud deberá presentar a lo largo del semestre. Los ejercicios de exámenes viejos están indicados con [XP/YS/20ZZ] al inicio del mismo. Esta notación significa que el ejercicio apareció en el X Parcial, del Y semestre del año 20ZZ. Por ejemplo; [1P/2S/2014] corresponde a un ejercicio del primer parcial, del segundo semestre, del 2014.

Cualquier consulta, duda o sugerencia para mejorar este material, puede dirigirse a los autores via correo electrónico a carjimenez@itcr.ac.cr.

TEC | Tecnológico de Costa Rica

1

Movimiento periódico y movimiento ondulatorio

1.1 Movimiento Armónico Simple

1. Una cuerda de piano produce una nota la medio vibrando primordialmente a 220 Hz.

   (a) Calcule su periodo y frecuencia angular.
   Usando la definición de periodo se tiene

$$T \equiv \frac{1}{f} = \frac{1}{220 \text{ Hz}} = 4.55 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

   Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot (220 \text{ Hz}) = 1382 \text{ rad/s}.$$

   El periodo de oscilación es 4.55×10^{-3} s y la frecuencia angular de oscilación es 1382 rad/s.

(b) Calcule el periodo y la frecuencia angular de una soprano que canta un la una octava más arriba, que tiene el doble de la frecuencia de la cuerda de piano.

La frecuencia para este caso se determina

$$f = 2\,(220 \text{ Hz}) = 440 \text{ Hz}.$$

Usando la definición de periodo se tiene

$$T \equiv \frac{1}{f} = \frac{1}{440 \text{ Hz}} = 2.27 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot (440 \text{ Hz}) = 2764 \text{ rad/s}.$$

El periodo de oscilación es 2.27×10^{-3} s y la frecuencia angular de oscilación es 2764 rad/s.

2. La punta de un diapasón efectúa 440 vibraciones completas en 0.500 s. Calcule la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

$$f = \frac{440 \text{ vibraciones}}{0.500 \text{ s}} = 880 \text{ Hz}.$$

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot (880 \text{ Hz}) = 5529 \text{ rad/s}.$$

Usando la definición de periodo se tiene

$$T \equiv \frac{1}{f} = \frac{1}{880 \text{ Hz}} = 1.14 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

El periodo de oscilación es 1.14×10^{-3} s y la frecuencia angular de oscilación es 5529 rad/s.

3. Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte ideal con constante de fuerza de 120 N/m. Se observa que vibra con una frecuencia de 6.00 Hz. Calcule

   (a) El periodo del movimiento;

   Usando la definición de periodo se tiene

$$T \equiv \frac{1}{f} = \frac{1}{6.00\ \text{Hz}} = 0.17\ \text{s}.$$

   El periodo de oscilación es 0.17 s.

   (b) La frecuencia angular;

   Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot (6.00\ \text{Hz}) = 37.7\ \text{rad/s}.$$

   La frecuencia angular de oscilación es 37.7 rad/s.

   (c) La masa del cuerpo.

   La masa del cuerpo se determina

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{120\ \text{N/m}}{(37.7\ \text{rad/s})^2} = 0.0844\ \text{kg}.$$

   La masa del cuerpo es 0.0844 kg.

4. Dos resortes ideales de constantes k_1 y k_2 están conectados a un bloque de masa m, que puede deslizarse por una superficie horizontal sin fricción como se aprecia en la figura 1.1. Si el bloque se desplaza hacia la derecha a partir del punto de equilibrio y se suelta. ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación del bloque?

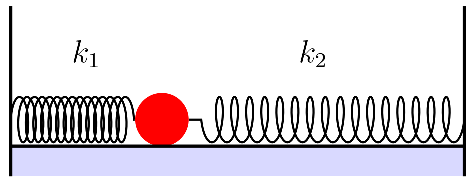


Figura 1.1: Sistema dos resortes

Hint: Haga un diagrama de cuerpo libre sobre el bloque e indique cuales fuerzas están actuando sobre el. Use la definición de aceleración instantánea

Analizando la suma de fuerzas que actuán sobre el resorte se tiene

$$\sum F_x = k_1 x + k_2 x = -m a_x.$$

Usando la definición de aceleración

$$(k_1 + k_2)\, x = -m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Se reescribe lo anterior y se obtiene la ecuación diferencial del movimiento armónico simple

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0,$$

Por comparación con la ecuación diferencial del MAS se tiene

$$\omega = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}},$$

por lo tanto la frecuencia de oscilación es

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}}}$$

5. La figura 1.2 representa un gráfico de posición (en cm) en función del tiempo (s) de un sistema masa resorte obtenido en un laboratorio de física mediante los sensores apropiados

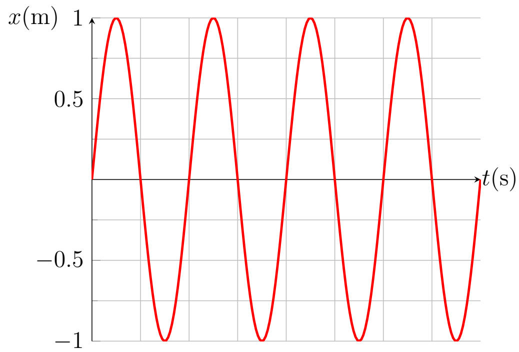


Figura 1.2: Variación de la posición de un sistema masa-resorte en función del tiempo

a) A su compañero(a) de mesa por accidente se le confundió cuales variables (velocidad, aceleración y fuerza) corresponden a los gráficos 1.3, 1.4 y 1.5. Indicar cuales variables se han graficado.

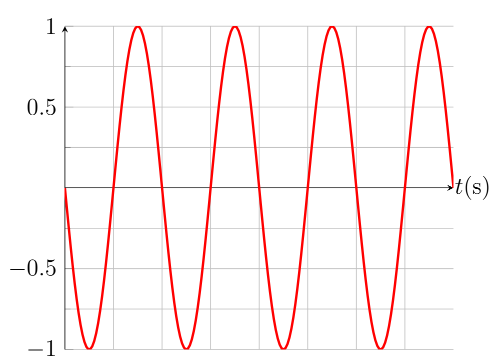


Figura 1.3

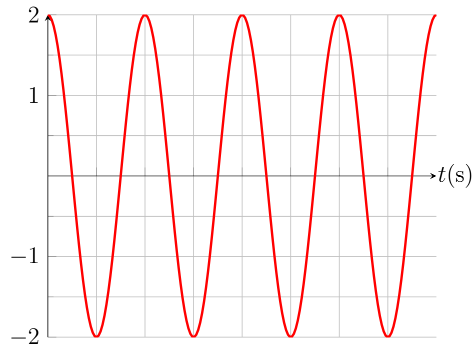


Figura 1.4

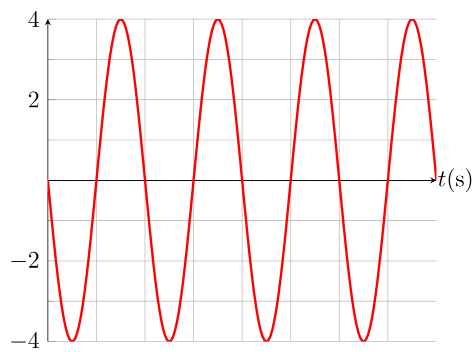


Figura 1.5

De acuerdo la figura 1.2 se propone que la posición de la masa viene determinada por

$$x\left(t\right)=A\sin\left(\omega t+\phi\right), \tag{1.1}$$

esto debido a que en $t=0$ se tiene que $x\left(0\right)=A\sin 0=0$.
A partir de la ecuación 1.1 se tiene

$$v\left(t\right)\equiv\frac{dx\left(t\right)}{dt}=A\omega\cos\left(\omega t+\phi\right)\rightarrow v_{\max}=A\omega, \tag{1.2}$$

$$a\left(t\right)\equiv\frac{dv\left(t\right)}{dt}=-A\omega^{2}\sin\left(\omega t+\phi\right)\rightarrow a_{\max}=v_{\max}\omega, \tag{1.3}$$

$$F\left(t\right)\equiv ma\left(t\right)=-Am\omega^{2}\sin\left(\omega t+\phi\right)\rightarrow F_{\max}=ma_{\max}. \tag{1.4}$$

La función $\cos \omega t$ en $t = 0$ es máxima y la única figura que cumple con esto es la figura 1.4.
De la figura 1.4 se tiene que la velocidad maxima es: $v_{max} = 2$ m/s; de la gráfica 1.2 se tiene que la amplitud del movimiento es $A = 1$ m. La amplitud máxima se relaciona con velocidad máxima de la siguiente manera

$$v_{\mathbf{max}} = A\omega,$$

de donde se obtiene la velocidad angular

$$\omega = \frac{v \text{max}}{A} = \frac{2 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 2 \text{ rad/s}.$$

Usando la ecuación 1.3 se obtiene la aceleración máxima

$$a \text{max} = (2 \text{ m/s}) \cdot 2 \text{ rad/s} = 4 \text{ m/s}^2.$$

Del resultado anterior se tiene que la gráfica de aceleración es la figura 1.5, por lo tanto se tiene que la figura 1.2 es la gráfica de fuerza.

La figura 1.3 corresponde a la gráfica de fuerza, la figura 1.4 corresponde a la gráfica de velocidad y la figura 1.5 corresponde a la gráfica de aceleración.

b) Calcule la masa que se utilizó para el experimento.
Usando la ecuación 1.4 se puede determinar la masa

$$F \text{max} = m a \text{max} \rightarrow m = \frac{F \text{max}}{a \text{max}} = \frac{1 \text{ N}}{4 \text{ m/s}^2} = 0.25 \text{ kg}.$$

La masa de la partícula es 0.25 kg.

c) A partir de estos valores calcule la constante de fuerza del resorte.
La constante de fuerza del resorte se determina

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 m = (2 \text{ rad/s})^2 \cdot 0.25 \text{ kg} = 0.50 \text{ N/m}.$$

La constante de fuerza del resorte es 0.50 N/m.

d) Escriba la ecuación de movimiento de la masa
Usando la ecuación (1.1) se tiene que la posición de la masa viene determinada por

$$x(t) = 1 \text{ m} \sin\left((2 \text{ rad/s})\, t\right) = 1 \text{ m} \cos\left((2 \text{ rad/s})\, t - \pi/2 \text{ rad}\right).$$

e) Determine la distancia recorrida por la masa después de 6.00 s
El periodo de oscilación del resorte se determina

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2 \text{ rad/s}} = \pi \text{ s} \sim 3.14 \text{ s}.$$

De lo anterior se tiene que 6,00 s es **casi dos veces** el periodo de oscilación de la masa. Se debe tener presente que en un periodo la partícula recorre una distancia igual a cuatro veces la amplitud. Para saber cual es la distancia se debe conocer cual es la posición de la partícula a los 6,00 s, la cual para este caso se determina

$$x(6 \text{ s}) = 1 \text{ m} \sin\left(2 \text{ rad/s} \cdot 6 \text{ s}\right) = -0.54 \text{ m}.$$

De lo anterior se tiene que la distancia recorrida por la masa en 6.00 s es

$$d = 8A - 0.54 \text{ m} = 8 \text{ m} - 0.54 \text{ m} = 7.46 \text{ m}.$$

La distancia recorrida por la masa después de 6.00 s es 7.46 m.

6. El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = 800 \text{ mm} \cos\left((4,16 \text{ rad/s})\, t - 2,42 \text{ rad}\right)$$

Calcule:

a) el tiempo que tarda una vibración completa,

El periodo de oscilación de la masa se determina

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.16 \text{ rad/s}} = 1.51 \text{ s}.$$

El periodo de oscilación de la masa es 1.51 s.

b) la constante de fuerza del resorte,

La constante de fuerza del resorte se determina

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 m = (4.16 \text{ rad/s})^2 \cdot 1.51 \text{ kg} = 26.1 \text{ N/m}.$$

La constante de fuerza del resorte es 26.1 N/m.

c) la rapidez máxima de la masa,

La rapidez máxima se determina

$$v_{\text{max}} = A\omega = 800 \text{ mm} \cdot 4.16 \text{ rad/s} = 3328 \text{ mm/s}.$$

La rapidez máxima de la masa es 3328 mm/s.

d) la fuerza máxima que actúa sobre la masa,

Para determinar la fuerza máxima que actúa sobre la masa primero se determina la aceleración máxima de la misma

$$a_{\text{max}} = A\omega^2 = 800 \text{ mm} \cdot (4.16 \text{ rad/s})^2 = 13844 \text{ mm/s}^2.$$

La fuerza máxima que actúa sobre la masa se determina

$$F_{\text{max}} = m a_{\text{max}} = 1.50 \text{ kg} \cdot 13.844 \text{ m/s}^2 = 20.8 \text{ N}.$$

La fuerza máxima que actúa sobre la masa es 20.8 N.

e) determine la distancia recorrida por la masa después de 4.51 s,
De acuerdo con la información que brinda el problema, el periodo de oscilación de la masa es 1.51 s. Si se compara con $t = 4.51$ s se tiene que este último es casi tres veces el periodo. Por otro lado se debe tener presente que en un tiempo igual al periodo la masa recorre una distancia igual a cuatro veces la amplitud, eso quiere decir que en un tiempo $t = 4,51$ s la masa recorre una distancia casi igual a doce veces la amplitud. Para calcular la distancia se debe conocer la posición inicial de la partícula y la posición de la misma en $t = 4.50$ s. Para este caso se tiene que a posición de la partícula en $t = 0$ s es

$$x\,(0 \text{ s}) = 800 \text{ mm} \cos\left(-2,42 \text{ rad}\right) = -600.1 \text{ mm},$$

y la posición de la partícula en $t = 4.50$ s se determina

$$x\,(4.50 \text{ s}) = 800 \text{ mm} \cos\left(\left(4.16 \text{ rad/s}\right)\left(4.50 \text{ s}\right) - 2,42 \text{ rad}\right) = -663.9 \text{ mm}.$$

La distancia recorrida por la masa en 4.51 s se determina

$$d = 12A - 63.8 \text{ mm} = 9600 \text{ mm} - 63.8 \text{ m} = 9536 \text{ mm}.$$

La distancia recorrida por la masa en 4.51 s es 9536 mm.

f) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1.0$ s,
La posición de la partícula en $t = 1$ s se determina para este caso

$$x\,(1 \text{ s}) = 800 \text{ mm} \cos\left(\left(4.16 \text{ rad/s}\right)\left(1 \text{ s}\right) - 2,42 \text{ rad}\right) = -134.7 \text{ mm}.$$

La velocidad de la partícula en $t = 1$ s se determina para este caso

$$\begin{aligned} v\,(1 \text{ s}) &= -800 \text{ mm} \cdot \left(4.16 \text{ rad/s}\right) \sin\left(\left(4.16 \text{ rad/s}\right)\left(1 \text{ s}\right) - 2.42 \text{ rad}\right) \\ &= -3280 \text{ mm/s}. \end{aligned}$$

La aceleración de la partícula en $t = 1$ s se determina para este caso

$$a\,(1\text{ s}) = -800\text{ mm}\cdot(4.16\text{ rad/s})^2\cos\left((4.16\text{ rad/s})\,(1\text{ s}) - 2.42\text{ rad}\right)$$
$$= 2331\text{ mm/s}^2.$$

La posición, velocidad y aceleración de la masa en $t = 1.0$ s son -134.7 mm, -3280 mm/s y 2331 mm/s^2 respectivamente.

g) y la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.
La fuerza que actúa sobre la masa en $t = 1$ s se calcula

$$F\,(1\text{ s}) = ma\,(1\text{ s}) = 1.5\text{ kg}\cdot 2.331\text{ m/s}^2 = 3.497\text{ N}.$$

La fuerza que actúa sobre la masa en $t = 1$ s es 3.497 N.

7. Una partícula unida a un resorte horizontal describe un movimiento armónico simple (M.A.S) con un período de 16,0 s. En t = 2,0 s, la partícula pasa por el origen. En t = 4,0 s, esta tiene una velocidad de 4,0 m/s hacia la derecha. Despreciando la fricción, encuentre:

(a) La frecuencia angular y la frecuencia natural de vibración.
Usando la definición de frecuencia se tiene

$$f \equiv \frac{1}{T} = \frac{1}{16.0\text{ s}} = 0.0625\text{ Hz}.$$

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi\cdot(0.0625\text{ Hz}) = \frac{\pi}{8}\text{ rad/s} = 0.393\text{ rad/s}.$$

El frecuencia de oscilación de la partícula es 0.0625 Hz y la frecuencia angular de oscilación es 0.393 rad/s.

(b) El ángulo de fase.

Se propone la ecuación de posición

$$x\,(t) = A \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

$$v\,(t) \equiv \frac{dx\,(t)}{dt} = A\omega \cos\left(\omega t + \phi\right)$$

Usando las condiciones del problema se tiene

$$x\,(2.0 \text{ s}) = 0 = A \sin\left(\omega \cdot 2.0 \text{ s} + \phi\right)$$

$$\to \arcsin(0) = \omega \cdot 2.0 \text{ s} + \phi.$$

La solución de arcsin(0) tiene dos soluciones

$$\arcsin\,(0) = \begin{cases} 0 \\ \\ \pi \end{cases},$$

por lo que se tienen dos posibilidades para el ángulo de fase

$$\to \begin{cases} \omega t + \phi = 0 \\ \\ \omega t + \phi = \pi \end{cases} \to \begin{cases} \phi = -\omega t = \frac{\pi}{8} \text{ rad/s} \cdot 2.0 \text{ s} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}, \\ \\ \phi = \pi - \omega t = \pi - \frac{\pi}{8} \text{ rad/s} \cdot 2.0 \text{ s} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}.$$

Aquí se debe escoger una de las dos soluciones, por lo que se analiza la ecuación de velocidad en $t = 4.0$ s, la cual tiene que ser mayor que cero, para que eso ocurra se tiene que cumplir

$$\cos\left(\omega t + \phi\right) > 0,$$

por lo que se evalúan las dos soluciones posibles

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} \text{ rad/s} \cdot 4.0 \text{ s} - \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right) = 0.71,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} \text{ rad/s} \cdot 4.0 \text{ s} + \frac{3\pi}{4} \text{ rad}\right) = -0.71.$$

De lo anterior se deduce que el ángulo de fase del movimiento es $\phi = \frac{\pi}{4}$ rad $= 0.786$ rad.

(c) La amplitud del movimiento.

Usando la ecuación de velocidad se determina la amplitud del movimiento

$$v\left(t\right) = A\omega\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

$$\rightarrow A = \frac{v\left(t\right)}{\omega\cos\left(\omega t + \phi\right)}$$

$$= \frac{v\left(4.0\text{ s}\right)}{\omega\cos\left(\omega t + \phi\right)}$$

$$= \frac{4.0\text{ m/s}}{\frac{\pi}{8}\text{ rad/s}\cos\left(\frac{\pi}{8}\text{ rad/s}\cdot 4.0\text{ s} - \frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)}$$

$$= 14.4\text{ m}$$

La amplitud del movimiento de la partícula es 14.4 m.

(d) Las ecuaciones del movimiento (posición y velocidad) en función del tiempo.

Para este caso se tiene

La ecuación de la posición de la partícula es

$$x\left(t\right) = \left(14.4\text{ m}\right)\sin\left(\left(\frac{\pi}{8}\text{ rad/s}\right)t - \frac{\pi}{4}\text{ rad}\right).$$

La ecuación de la velocidad de la partícula es

$$v\left(t\right) = \left(5.65\text{ m/s}\right)\cos\left(\left(\frac{\pi}{8}\text{ rad/s}\right)t - \frac{\pi}{4}\text{ rad}\right).$$

8. El movimiento de una masa puntual de 0,350 kg que oscila como un péndulo de longitud L se describe con la curva sinusoidal de la figura 1.6.

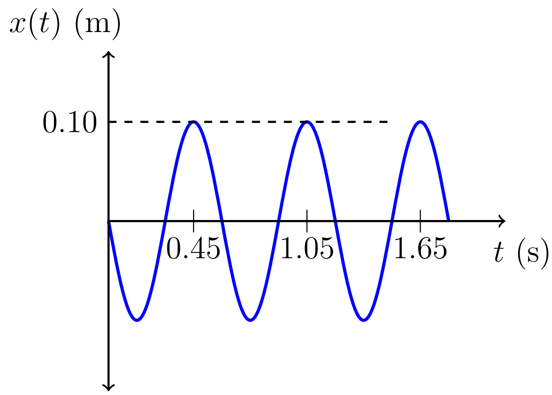


Figura 1.6: Péndulo simple

A partir de esta información:

a) Calcule el periodo de oscilación

De acuerdo con la figura 1 se tiene que el periodo de oscilación de la partícula es 0.600 s

b) Escriba la ecuación para el desplazamiento de la masa en función del tiempo

Como la partícula describe un movimiento armónico simple se propone la ecuación de movimiento

$$x\left(t\right) = A\cos\left(\omega t + \phi\right),$$

donde de acuerdo con la figura 1 la amplitud del kmovimiento es $A = 0.1$ m. Usando la definición de velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.600s} = 1.05 \text{ rad/s}.$$

El ángulo de fase se puede encontrar comparando la forma de la gráfica con la función $\cos\theta$. De ahí se tiene $\phi = \pi/2 = 1.57$ rad, por lo que la ecuación de movimiento es

$$\boxed{x\,(t) = (0.1 \text{ m})\cos\left((1.05 \text{ rad/s})\,t + 1.57 \text{ rad}\right)}$$

c) Calcule la longitud L del péndulo si consideramos que este se encuentra en el planeta tierra

Usando el periodo de un péndulo simple se tiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

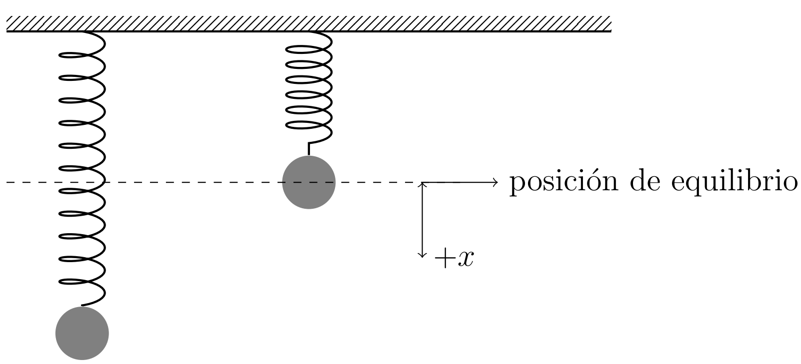
$$\rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$= \frac{\left(9.8 \text{ m/s}^2\right)\cdot(0.600 \text{ m})^2}{4\pi^2}$$

$$= 0.089 \text{ m}$$

$$\boxed{\text{La longitud del péndulo es } 0.089 \text{ m.}}$$

9. Una partícula de masa m que esta unida a un resorte vertical de constante $k = 400.0$ N/m describe un movimiento armónico simple. La amplitud de dicho movimiento es de 0.10 m. Cuando la partícula se encuentra en la posición $x = 0{,}05$ m esta tiene una velocidad $v = 2{,}0$ m/s hacia abajo. Además se sabe que en $t = 0$ s la misma se encuentra en la posición $x = -0.10$ m . Despreciando la fricción, determine:



(a) La masa de la partícula.

Usando la ecuación de la velocidad en función de la posición para el MAS se determina la frecuencia angular

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{-v}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{-(2,0 \text{ m/s})}{\sqrt{(0.10 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2}} = 23.1 \text{ rad/s}$$

Usando la expresión para la frecuencia angular de un sistema masa-resorte

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{400.0 \text{ N/m}}{(23.1 \text{ rad/s})^2} = 0.75 \text{ kg}$$

(b) La frecuencia natural de oscilación.

Usando la definición de frecuencia angular

$$\omega \equiv 2\pi f,$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{23.1 \text{ rad/s}}{2\pi} = 3.68 \text{ Hz}$$

(c) La ecuación de la posición.

Se propone

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Para determinar el ángulo de fase se analizan las funciones de posición y velocidad. De la ecuación de la velocidad

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow x(0) = A\cos(\phi) = -A$$

$$\rightarrow \cos(\phi) = -1.$$

Lo anterior nos lleva a que ϕ tiene las posibles soluciones

$$\phi = \begin{cases} \pi \\ \\ -\pi \end{cases}$$

Usando la ecuación de la velocidad se tiene

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\rightarrow v(0\ \text{s}) = -A\omega \sin(\phi) > 0$$

De las soluciones ϕ, la única que cumple la condición es $\phi = -\pi$ rad $= -3.14$ rad. La ecuación que describe el movimiento de la partícula es

$$x(t) = 0.10\ \text{m} \cos((23.1\ \text{rad/s})\, t - 3.14\ \text{rad})$$

(d) La distancia que se estira el resorte desde su longitud natural cuando el objeto se encuentra en equilibrio.

Por las condiciones de equilibrio se tiene

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{0.75\ \text{kg} \cdot 9.8\ \text{m/s}^2}{400.0\ \text{N/m}} = 0.018\ \text{m}$$

10. Un bloque cúbico de madera ($\rho_M = 650$ kg/m^3), de lado $a = 20$ cm, se encuentra en equilibrio parcialmente sumergido en agua ($\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3). Al aplicar una fuerza sobre la superficie superior del bloque, su centro de masa se desplaza ligeramente una distancia y hacia abajo. Si se suprime la fuerza, el bloque describe un movimiento armónico simple alrededor de la posición de equilibrio del centro de masa. En forma diferencial, la ecuación de movimiento del bloque es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\rho_{agua}}{\rho_M}\frac{g}{a} y = 0 \tag{1.5}$$

Si en $t = 0$ el bloque se encuentra en la posición $y = 4.00$ cm, moviéndose hacia arriba con velocidad $v_0 = 25.0$ cm/s, determine:

a) La rapidez angular.

Comparando la ecuación diferencial (1.5) con la ecuación diferencial del **MAS** se tiene

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{\rho_{agua}}{\rho_M}\frac{g}{a}} \\
&= \sqrt{\frac{1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9.8\ \text{m/s}^2}{650\ \text{kg/m}^3 \cdot 0.20\ \text{m}}} \\
&= 8.68\ \text{rad/s}
\end{aligned}$$

La rapidez angular del movimiento que describe el bloque es 8.68 rad/s.

b) La amplitud del movimiento.

Usando la ecuación

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)2} \\
&= \sqrt{(4.00\ \text{cm})^2 + \left(\frac{25.0\ \text{cm/s}}{8.68\ \text{rad/s}}\right)2} \\
&= 4.93\ \text{cm}
\end{aligned}$$

La amplitud del movimiento es 4.93 cm

c) El ángulo de fase.

Usando la ecuación

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$= \arctan\left(-\frac{25.0\ \text{cm/s}}{8.68\ \text{rad/s}\cdot 4.00\ \text{cm}}\right)$$

$$= -0.624\ \text{rad}$$

El ángulo de fase es -0.624 rad.

d) Las ecuaciones para la posición, $y(t)$, y la velocidad, $v(t)$, en función del tiempo.

Se propone la función de posición

$$x\left(x\right) = A\cos\left(\omega t + \phi\right),$$

con lo que se tiene la ecuación de velocidad

$$v\left(x\right) = -A\omega\sin\left(\omega t + \phi\right).$$

Usando los resultados de las preguntas a), b) y c) se tiene

$$x\left(x\right) = \left(4.93\ \text{cm}\right)\cos\left[\left(8.68\ \text{rad/s}\right)t - \left(0.624\ \text{rad}\right)\right],$$

$$v\left(x\right) = -\left(42.8\ \text{cm/s}\right)\sin\left]\left(8.68\ \text{rad/s}\right)t - \left(0.624\ \text{rad}\right)\right].$$

e) La velocidad del bloque en $t = 10$ s.

En $t = 10$ s se tiene

$$v\left(10\ \text{s}\right) = -\left(42.8\ \text{cm/s}\right)\sin\left]\left(8.68\ \text{rad/s}\right)\left(10\ \text{s}\right) - \left(0.624\ \text{rad}\right)\right].$$

$= 41.8$ cm/s

La velocidad del bloque en $t = 10$ s. es 41.8 cm/s

1.2 Ondas mecánicas

1. La ecuación de cierta onda transversal es:

$$y\,(x,t) = 6,50 \text{ mm} \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{28,0 \text{ cm}} - \frac{t}{0,0360 \text{ s}} + \frac{1}{4\pi}\right)\right]$$

Determine:

(a) amplitud

La amplitud de la onda es 6.50 mm.

(b) longitud de onda

Usando la definición de número de onda se tiene

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{28.0 \text{ cm}}\right)} = 28.0 \text{ cm}.$$

La longitud de onda es 28.0 cm.

(c) frecuencia

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\left(\frac{2\pi}{0.360\ \mathrm{s}}\right)}{2\pi} = 27.8\ \mathrm{Hz}.$$

La frecuencia de oscilación de la onda es 27.8 Hz.

(d) rapidez de propagación

Usando la definición de rapidez de propagación se tiene

$$v \equiv \lambda f = 28.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} \cdot 27.8\ \mathrm{Hz} = 7.78\ \mathrm{m/s}.$$

La rapidez de propagación de la onda es 7.78 m/s.

(e) dirección de propagación de la onda

Debido a que adelante de la parte temporal, en la ecuación de la onda, hay un "-" y que la parte espacial esta representada por la letra x, se tiene que la onda se propaga en la dirección $+x$.

(f) Ángulo de fase

De acuerdo con la ecuación de la onda se tiene que el ángulo de fase es

$$\phi = \frac{2\pi}{4\pi}\ \mathrm{rad} = \frac{1}{2}\ \mathrm{rad} = 0.5\ \mathrm{rad}.$$

El ángulo de fase de la onda es 0.5 rad.

2. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por:

$$y\left(x,t\right)=2,30\ \mathrm{mm}\cos\left[2\pi\left(bx-\left(7,42\ \mathrm{rad/s}\right)t\right)\right]$$

Determine

(a) La Frecuencia y la longitud de onda

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega\equiv2\pi f$$

$$\rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\left(2\pi\cdot7.42\ \mathrm{rad/s}\right)}{2\pi}=7.42\ \mathrm{Hz}.$$

Usando la definición de número de onda se tiene

$$k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\rightarrow\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\left(2\pi b\right)}=\frac{1}{b}.$$

La frecuencia de oscilación de la onda es 7.42 Hz y la longitud de onda es $\frac{1}{b}$.

(b) Hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda en función de x y t

Usando la definición de velocidad transversal de una partícula en una onda se tiene

$$\begin{aligned}v_y\left(x,t\right)&\equiv\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial t}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(A\cos\left(kx-\omega t+\phi\right)\right)\\&=A\omega\sin\left(kx-\omega t+\phi\right)\\&=\left(2,30\ \mathrm{mm}\right)\left(2\pi\cdot7.42\ \mathrm{rad/s}\right)\sin\left[2\pi\left(bx-\left(7,42\ \mathrm{rad/s}\right)t\right)\right]\\&=\left(107.2\ \mathrm{mm/s}\right)\sin\left[2\pi\left(bx-\left(7,42\ \mathrm{rad/s}\right)t\right)\right].\end{aligned}$$

La velocidad transversal de una partícula en la cuerda es

$$v_y\left(x,t\right) = \left(107.2\text{ mm/s}\right)\sin\left[2\pi\left(bx - \left(7,42\text{ rad/s}\right)t\right)\right]$$

3. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por:

$$y\left(x,t\right) = 0.10\text{ m}\sin\left(0.7x - 0.5t\right)$$

donde x está en metros y t en segundos.

a) Hallar el desplazamiento vertical de una partícula de la cuerda en $x = 1.5$ m y $t = 0.15$ s

Se evalúa la función en $x = 1.5$ m y $t = 0.15$

$$y\left(1.5\text{ m}, 0.15\text{ s}\right) = 0.10\text{ m}\sin\left(0.7\text{ rad/m}\cdot 1.5\text{ m} - 0.5\text{ rad/s}\cdot 0.15\text{ s}\right)$$

$$= 0.0823\text{ m.}$$

El desplazamiento vertical de una partícula de la cuerda en $x = 1.5$ m y $t = 0.15$ s es 0.0823 m.

b) Hallar la velocidad de propagación de la onda

Usando las definiciones de frecuencia angular y número de onda se calcula la frecuencia y la longitud de onda

$$\omega \equiv 2\pi f$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0.5\text{ rad/s}}{2\pi} = 0.0796\text{ Hz,}$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.7\text{ rad/m}} = 8.98\text{ m}$$

Usando la definición de velocidad de propagación se tiene

$$v \equiv \lambda f = 8.98\text{ m}\cdot 0.0796\text{ Hz} = 0.715\text{ m/s.}$$

La rapidez de propagación de la onda es 0.715 m/s.

c) Hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda en función de x y t

Usando la definición de velocidad transversal de una partícula en una onda se tiene

$$\begin{aligned}
v_y(x,t) &\equiv \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin\left(kx-\omega t+\phi\right)\right) \\
&= -A\omega\cos\left(kx-\omega t+\phi\right) \\
&= -\left(0.10\ \text{m}\right)\left(0.5\ \text{rad/s}\right)\cos\left[\left(0.7\ \text{rad/m}\right)x-\left(0.5\ \text{rad/s}\right)t\right] \\
&= -\left(0.050\ \text{m/s}\right)\cos\left[\left(0.7\ \text{rad/m}\right)x-\left(0.5\ \text{rad/s}\right)t\right]
\end{aligned}$$

La velocidad transversal de una partícula en la cuerda es

$$v_y(x,t) = -\left(0.050\ \text{m/s}\right)\cos\left[\left(0.7\ \text{rad/m}\right)x-\left(0.5\ \text{rad/s}\right)t\right]$$

4. De una carrucha de cuerda de nailon se corta un trozo de 89.4 cm de longitud y se fija por sus extremos a dos soportes rígidos. La carrucha de donde se tomó la cuerda indica que la longitud total de cuerda en la carrucha es 25.0 m y que toda la cuerda tiene una masa de 179.0 g. La cuerda es sometida a una tensión de 152.0 N. La cuerda vibra según el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura 1.7

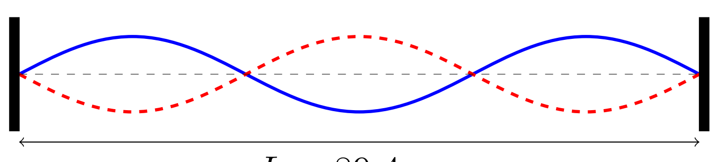


Figura 1.7

Determine:

(a) La velocidad de propagación de la onda

Usando la ecuación de la velocidad de propagación de las ondas mecánicas en una cuerda se tiene

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL_{total}}{m_{total}}} = \sqrt{\frac{(152.0\ \text{N}) \cdot (25.0\ \text{m})}{0.179\ \text{kg}}} = 146\ \text{m/s}.$$

La velocidad de propagación de la onda es 146 m/s.

(b) La longitud de onda

Para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda con sus extremos fijo se debe satisfacer la condición $L = n\lambda_n/2$, donde n representa el modo normal de oscilación de las ondas, el cual para este caso es $n = 3$. A partir de lo anterior se tiene

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \cdot 0.894\ \text{m}}{3} = 0.596\ \text{m}.$$

La longitud de onda es 0.596 m.

(c) La frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración.

Usando la definición de velocidad de propagación de las ondas viajeras

$$v = \lambda_n f_n$$

$$\rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{146\ \text{m/s}}{0.596\ \text{m}} = 245\ \text{Hz}.$$

La frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración es 245 Hz.

(d) A cual modo (o armónico) pertenece la frecuencia encontrada en el punto anterior.

De acuerdo con el patrón de la cuerda mostrado en la figura 1.7 se puede asegurar que la frecuencia de las ondas encontradas en el punto anterior pertenece al tercer armónico.

(e) Si se desea que esta cuerda vibre con su frecuencia fundamental, ¿Se debe modificar la tensión en la cuerda?

La frecuencia y longitud de onda fundamental de oscilación se determina

$$f_n = n f_1$$

$$\rightarrow f_1 = \frac{f_n}{n} = \frac{f_3}{3} = \frac{245 \text{ Hz}}{3} = 81.7 \text{ Hz}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2 \cdot 0.894 \text{ m} = 1.788 \text{ m}$$

La velocidad de propagación se determina

$$v = \lambda_n f_n$$

$$\rightarrow v = \lambda_1 f_1 = 1.788 \text{ m} \cdot 81.7 \text{ Hz} = 146 \text{ m/s}$$

La velocidad de propagación en una cuerda depende de la tensión

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Dado que la la velocidad de propagación no se modifica y que la masa de la cuerda no cambia la tensión de la cuerda se mantiene constante.

(f) Considere el caso en el que la frecuencia encontrada en el punto c) fuera la fundamental ¿Cuál debe ser el nuevo valor de la tensión en la cuerda?

Para este caso la frecuencia fundamental de oscilación es 245 Hz y la longitud de onda es 1.788 m. Usando la definición de la velocidad de propagación , se tiene para este caso

$$v = \lambda_n f_n$$

$$\rightarrow v = \lambda_1 f_1 = 1.788 \text{ m} \cdot 245 \text{ Hz} = 438 \text{ m/s}$$

Usando la ecuación de la velocidad de propagación de la ondas en una cuerda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\rightarrow F = \frac{v^2 m}{L} = \frac{(438 \text{ m/s})^2 \cdot 0.179 \text{ kg}}{25.0 \text{ m}} = 1374 \text{ N.}$$

La nueva tensión de la cuerda es 1374 N.

5. Considere una onda $y(x,t)$ que se propaga a 20 cm/s es descrita por la figura 1.8

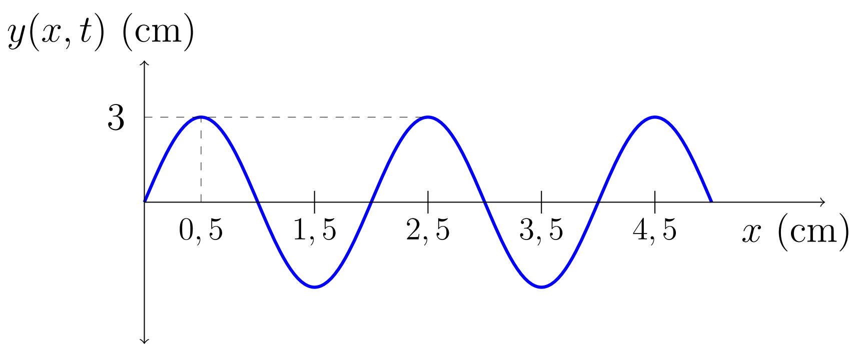


Figura 1.8

(a) Determine el periodo de Oscilación de la Onda

De la figura 1.8 se tiene que la longitud de onda es $\lambda = 2$ cm.

Usando la definiciones de la velocidad de propagación y frecuencia

$$v = \lambda f$$

$$\rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{20\ \text{cm/s}}{2\ \text{cm}} = 10\ \text{Hz},$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10\ \text{Hz}} = 0.10\ \text{s}$$

El periodo de oscilación de la onda es 0.10 s

(b) Escriba la función $y(x,t)$

Para este caso se propone la función de onda

$$y\left(x,t\right) = A\sin\left(kx - \omega t + \phi\right)$$

De la figura 1.8 se tiene que la amplitud del movimiento de las partículas que componen la cuerda es 3 cm y además el ángulo de fase es 0 pues la función graficada es idéntica a la función seno
Usando las definiciones de frecuencia angular y número de onda se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot 10\ \text{Hz} = 62.8\ \text{rad/s}$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\ \text{cm}} = 3.14\ \text{rad/cm}$$

La función de onda es

$$y\left(x,t\right) = \left(3\ \text{cm}\right)\sin\left[\left(3.14\ \text{rad/cm}\right)x - \left(62.8\ \text{rad/s}\right)t\right]$$

(c) Hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda en función de x y t

Usando la definición de velocidad transversal de una partícula en una onda se tiene

$$
\begin{aligned}
v_y(x,t) &\equiv \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin\left(kx-\omega t\right)\right) \\
&= -A\omega\cos\left(kx-\omega t\right) \\
&= -\left(3\ \text{cm}\right)\left(62.8\ \text{rad/s}\right)\cos\left[\left(3.14\ \text{rad/cm}\right)x-\left(62.8\ \text{rad/s}\right)t\right] \\
&= -\left(188.4\ \text{cm/s}\right)\cos\left[\left(3.14\ \text{rad/cm}\right)x-\left(62.8\ \text{rad/s}\right)t\right]
\end{aligned}
$$

La velocidad transversal de una partícula en la cuerda es

$$v_y(x,t) = -\left(188.4\ \text{cm/s}\right)\cos\left[\left(3.14\ \text{rad/cm}\right)x-\left(62.8\ \text{rad/s}\right)t\right]$$

(d) Hallar la ecuación de una onda que sumada a $y(x,t)$ produzca ondas estacionarias en la cuerda

La función de onda que sumada a $y(x,t)$ que produce ondas estacionarias es:

$$y(x,t) = -\left(3\ \text{cm}\right)\sin\left[\left(3.14\ \text{rad/cm}\right)x+\left(62.8\ \text{rad/s}\right)t\right]$$

6. Un generador en un extremo de una cuerda con longitud de 3,00 m crea una onda dada por:

$$y_1(x,t) = (0.06m)\cos\left[\pi/2\left[\left(2.00\ \mathrm{m}^{-1}\right)x + \left(8.00\ \mathrm{s}^{-1}\right)t\right]\right]$$

Y uno en el otro extremo crea la onda

$$y_2(x,t) = (0.06m)\cos\left[\pi/2\left[\left(2.00\ \mathrm{m}^{-1}\right)x - \left(8.00\ \mathrm{s}^{-1}\right)t\right]\right]$$

Determine:

(a) La frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de cada una de estas ondas.

Usando la definición de frecuencia angular se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{(\pi/2 \cdot 8.00\ \mathrm{s}^{-1})}{2\pi} = 2.00\ \mathrm{Hz}.$$

Usando la definición de número de onda se tiene

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(\pi/2 \cdot 2.00\ \mathrm{m}^{-1})} = 2.00\ \mathrm{m}.$$

Usando la definición de velocidad de propagación se tiene

$$v \equiv \lambda f = 2.00\ \mathrm{m} \cdot 2.00\ \mathrm{Hz} = 4.00\ \mathrm{m/s}.$$

La frecuencia de oscilación de la onda es 2.00 Hz., la longitud de onda es 2.00 m y la velocidad de propagación de las ondas es 4.00 m/s

(b) ¿En qué valores de x están los nodos y los antinodos de la onda resultante estacionaria?

La onda estacionaria resultante es

$$Y(x,t) = y_1(x,t) - y_2(x,t).$$

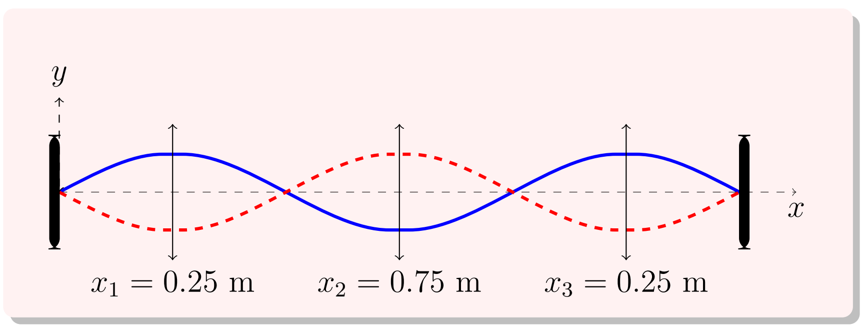
Usando la identidad trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

y tomando $A = \pi/2\left[\left(2.00\ \mathrm{m}^{-1}\right)x\right]$ y $B = \pi/2\left[\left(8.00\ \mathrm{s}^{-1}\right)t\right]$ se obtiene

$$Y(x,t) = (0.12\ \mathrm{m})\sin\left[\pi/2\left[\left(2.00\ \mathrm{m}^{-1}\right)x\right]\right]\sin\left[\pi/2\left[\left(8.00\ \mathrm{s}^{-1}\right)t\right]\right].$$

La distancia entre un antinodo y un nodo es $\lambda/4$, lo cual para este caso es 0.25 m por lo que las posiciones de los antinodos es



7. Don Jorge, un constructor con conocimientos en ondas, no tiene una cinta métrica y ocupa medir el largo de una pared. Él decide realizar un experimento donde utiliza sus conocimientos de ondas estacionarias con la ayuda de un pedazo de cuerda ($\mu = 50.0$ g/cm) que tiene el mismo largo de la pared y obtiene el siguiente patrón:

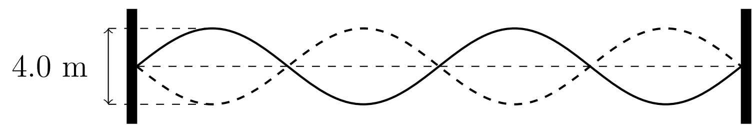


Figura 1.9

Él se da cuenta que el periodo de oscilación para este patrón es de 1.20 s y que la tensión de la cuerda es de 3.50 N. Determine:

(a) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

La velocidad de propagación de las ondas mecánicas en una cuerda se determina

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{3.5 \text{ N}}{5.00 \text{ kg/m}}} = 0.837 \text{ m/s}$$

La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es 0.837 m/s

(b) La longitud de la cuerda.

Usando la definición de frecuencia se obtiene

$$f \equiv \frac{1}{T} = \frac{1}{1.20 \text{ s}} = 0.833 \text{ Hz}.$$

Usando la definición de velocidad de propagación se determina la longitud de onda

$$v \equiv \lambda_n f_n$$

$$\rightarrow \lambda_n = \frac{v}{f_n} = \frac{0.837 \text{ m/s}}{0.833 \text{ Hz}} = 1,00 \text{ m}.$$

Para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda con sus extremos fijos se debe cumplir $L = \frac{n\lambda_n}{2}$. De acuerdo con la figura 1.9 el modo normal de oscilación de las ondas estacionarias es $n = 4$. De lo anterior se tiene

$$L = \frac{4\lambda}{2} = \frac{4 \cdot 1,00 \text{ m}}{2} = 2,00 \text{ m}.$$

La longitud de la cuerda es $2,00$ m.

(c) Escriba la ecuación de la onda estacionaria.

Se propone la función de onda

$$Y(x,t) = 2A \sin kx \sin \omega t$$

De la figura 1.9 se tiene que $2A = 4.0$ m. Usando la definición de frecuencia angular y el número de onda

$$\omega_4 \equiv 2\pi f_4 = 2\pi \cdot 0.833 \text{ Hz} = 5.23 \text{ rad/s},$$

$$k_4 \equiv \frac{2\pi}{\lambda_4} = \frac{2\pi}{1.00 \text{ m}} = 6.28 \text{ rad/m}.$$

La ecuación de las ondas estacionarias en la cuerda es

$$Y(x,t) = 4.0 \text{ m} \sin\left[(6.28 \text{ rad/m})\, x\right] \sin\left[(5.23 \text{ rad/s})\, t\right]$$

(d) Suponga que dicha cuerda se corta en cuatro partes exactamente iguales. Una de las partes se pone a oscilar con la misma tensión y produce ondas estacionarias con la misma frecuencia original. Determine ¿en cuál modo normal se producen las nuevas ondas estacionarias?

El hecho de cortar la cuerda, en este caso, no modifica la densidad lineal de masa de la misma. Por otro lado si la cuerda se pone a oscilar con la misma tensión la velocidad de propagación de las ondas no cambia. A partir de la condición para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda se determina el modo normal de oscilación

$$f_n = \frac{nv}{2L_{nueva}}$$

$$\rightarrow n = \frac{2f_n L_{nueva}}{v} = \frac{2 \cdot 0.833 \text{ Hz} \cdot 0.50 \text{ m}}{0.837 \text{ m}} = 1.00$$

Las nuevas ondas estacionarias vibran en su modo fundamental de oscilación

8. En un experimento de laboratorio de física se deseaba analizar las ondas mecánicas generadas por una cuerda cuya densidad lineal de masa era $\mu = 0.55$ kg/m. La tensión sobre la cuerda era $F = 0.352$ N. Por accidente, los estudiantes, solo obtuvieron las gráficas de velocidad y aceleración, pero sin los valores del tiempo, tal y como se muestra en las figuras 1.10 y 1.11.

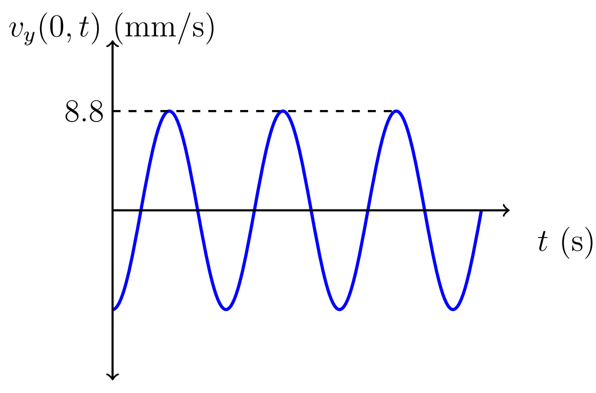


Figura 1.10

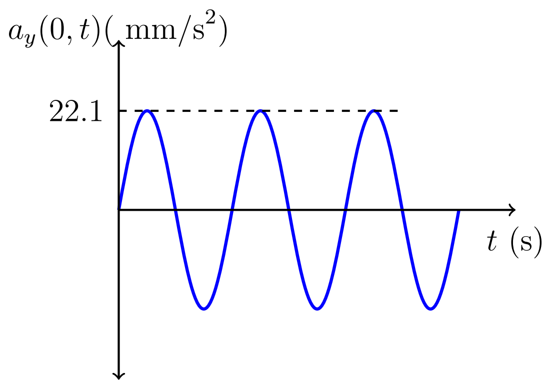


Figura 1.11

A partir de la información dada determine:

(a) La frecuencia angular, la frecuencia, el periodo de oscilación y la amplitud de las ondas.

A partir de las gráficas se tiene $a_{max} = 22.1$ mm/s^2 y $v_{max} = 8.8$ mm/s. Se sabe que

$$v_{max} = A\omega, \tag{1.6}$$

$$a_{max} = A\omega^2, \tag{1.7}$$

$$\rightarrow a_{max} = v_{max}\omega,$$

de donde se obtiene

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{22.1 \text{ mm/s}^2}{8.8 \text{ mm/s}} = 2.51 \text{ rad/s}.$$

Usando la definición de frecuencia angular

$$\omega \equiv 2\pi f,$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.51 \text{ rad/s}}{2\pi} = 0.40 \text{ Hz}.$$

Usando la definición de periodo

$$f \equiv \frac{1}{T},$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.40\ \text{Hz}} = 2.50\ \text{s}.$$

Usando las ecuaciones (1.6) se tiene

$$v_{max} = A\omega,$$

$$\rightarrow A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{8.8\ \text{mm/s}}{2.51\ \text{rad/s}} = 3.51\ \text{mm}.$$

La frecuencia angular de las ondas es 2.51 rad/s, la frecuencia de oscilación es 0.40 Hz, el periodo de oscilación es 2.50 s y la amplitud de las ondas es 3.51 mm.

(b) La velocidad de propagación de la ondas

La velocidad de propagación de las ondas mecánicas en una cuerda se determina

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{0.352\ \text{N}}{0.55\ \text{kg/m}}} = 0.80\ \text{m/s}.$$

La velocidad de propagación de la ondas es 0.80 m/s

(c) La longitud de onda y el número de onda

Usando la definición de velocidad de propagación se tiene

$$v \equiv \lambda f,$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.80\ \text{m/s}}{0.40\ \text{Hz}} = 2.0\ \text{m}.$$

Usando la definición de número de onda

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2.0\ \text{m}} = \pi\ \text{rad/m} = 3.14\ \text{rad/m}.$$

La longitud de onda es 2.0 m/s y el número de onda es 3.14 rad/m.

(d) Escriba la función de onda $y\left(x,t\right)$ si se considera que estas viajan en la dirección $+x$

Se propone para este caso

$$y\left(x,t\right)=A\cos\left(kx-\omega t+\phi\right)$$

Para determinar el ángulo de fase se analizan la velocidad y la aceleración en $x=0$ y $t=0$. De la ecuación de la aceleración

$$a\left(x,t\right)=-A\omega^{2}\cos\left(kx-\omega t+\phi\right)$$

$$\rightarrow a\left(0,0\right)=-A\omega^{2}\cos\left(\phi\right)=0$$

$$\rightarrow\cos\left(\phi\right)=0.$$

Lo anterior nos lleva a que ϕ tiene las posibles soluciones

$$\phi=\begin{cases}\pi/2\\ \\ -\pi/2\end{cases}$$

Usando la ecuación de la velocidad transversal y los datos de la figura (1.10) se tiene

$$v_{y}\left(x,t\right)=A\omega\sin\left(kx-\omega t+\phi\right)$$

$$\rightarrow v_{y}\left(0,0\right)=A\omega\sin\left(\phi\right)=-A\omega$$

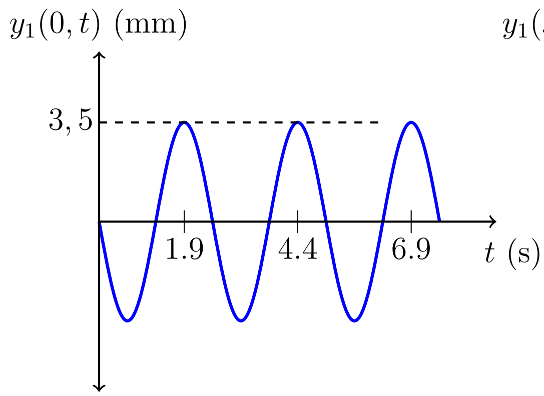
$$\rightarrow\sin\left(\phi\right)=-1.$$

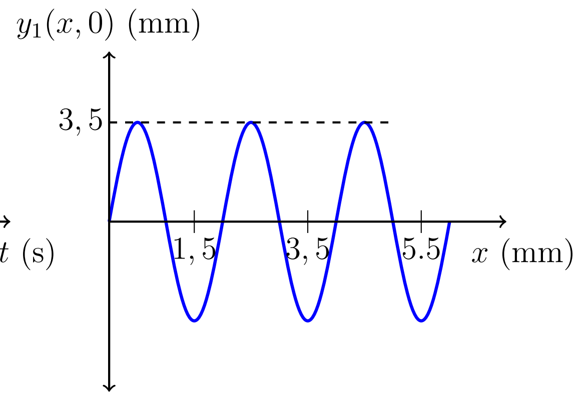
De las posibles soluciones de ϕ, la única que cumple la condición es $\phi=-\pi/2$ rad $=-1.57$ rad.

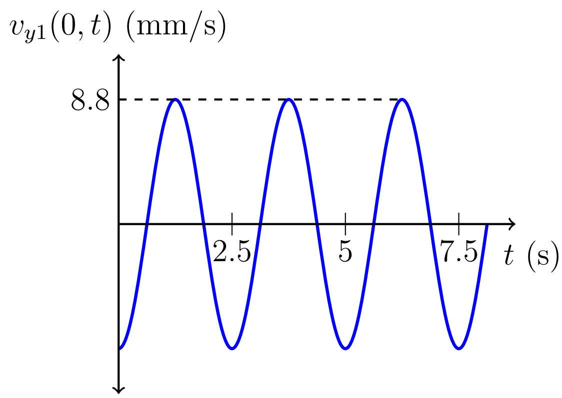
La ecuación que describe a las ondas mecánicas es

$$y\left(x,t\right)=3.51\text{ mm}\cos\left(\left(3.14\text{ rad/m}\right)x-\left(2.51\text{ rad/s}\right)t-1.57\text{ rad}\right).$$

9. Una onda mecánica es descrita por los siguientes figuras







Determine a partir de la información dada:

a) La velocidad de propagación de la onda

De los gráficos se tiene

$$\lambda = 2 \text{ mm},$$

$$T = 2,5 \text{ s}.$$

Usando la definición de frecuencia se tiene

$$f \equiv \frac{1}{T} = \frac{1}{2,5 \text{ s}} = 0,4 \text{ Hz}.$$

Usando la definición de velocidad de propagación la velocidad de propagación

$$v \equiv \lambda f = 2 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot 0,4\ \text{s} = 8,0 \times 10^{-4}.\ \text{m/s}$$

La velocidad de propagación de la onda es $8,0 \times 10^{-4}$ m/s

b) La función de onda $y_1(x,t)$
Se Propone que la función de una onda mecánica viene dada por

$$y_1(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t + \phi\right).$$

De los gráficos se tiene

$$A = 3,5\ \text{mm}.$$

Usando las definiciones de número de onda y de frecuencia angular

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2\ \text{mm}} = 1\ \text{rad/mm},$$

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot 0,4\ \text{s} = 2.51\ \text{rad/s}.$$

Con las condiciones iniciales se determina el ángulo de fase

$$y(0,0) = 0 = A\cos\left(\phi\right),$$

donde se tiene

$$\phi = \arccos\left(0\right) = \begin{cases} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{cases}$$

Para saber cual es el ángulo de fase se analiza la ecuación de velocidad

$$v_{y1}\left(x,t\right) = A\omega\sin\left(kx - \omega t + \phi\right).$$

En $t = 0$ y $x = 0$ de acuerdo a las figuras se tiene $v_{y1}(0,0) = 8,80$ mm/s. Usando $\phi = \pi/2$ se obtiene

$$v_{y1}(0,0) = (8.80 \text{ mm/s}) \, \sin(\pi/2) = 8.80 \text{ mm/s},$$

por lo que se concluye que $\phi = \pi/2$ es el ángulo de fase.

La función de onda que describe a las ondas mecánicas es

$$y_1(x,t) = (3.5 \text{ mm/s}) \, \cos((1 \text{ rad/mm})\, x - (2.51 \text{ rad/s})\, t + \pi/2) \, .$$

Para los dos siguientes preguntas suponga que $y_1(x,t)$ representa una onda incidente en una cuerda ($m = 3,3$ g) la cual forma ondas estacionarias con otra onda reflejada y determine:

c) La Longitud de la cuerda si la misma esta vibrando en su sexto modo normal

De acuerdo con lo obtenido en los puntos anteriores $\lambda = 2$ mm. Para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda se debe cumplir

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

donde se tiene para este caso $n = 6$, con lo que se obtiene

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} = \frac{6 \cdot 2 \text{ mm}}{2} = 6 \text{ mm}.$$

La Longitud de la cuerda es 6 mm.

d) La tensión de la cuerda

Usando la ecuación de la velocidad de propagación de la ondas por un cuerda

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \\
\rightarrow F &= v^2 \\
\rightarrow F &= \frac{v^2 m}{L} \\
&= \frac{(8.0 \times 10^{-4}\ \text{m/s})^2 \cdot 3.3 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{6 \times 10^{-3}\ \text{m}} \\
&= 3.52 \times 10^{-7}\ \text{N}.
\end{aligned}
$$

La tensión de la cuerda es 3.52×10^{-7} N.

10. En un laboratorio de física se genera una onda estacionarias en una cuerda, la cual tiene una masa de 0.020 kg y una longitud igual a 1.5 m. Él patrón que describen las mismas se muestra en la figura 1.12. Si la velocidad de propagación de las ondas viajeras que generan la onda estacionaria es de 180 m/s determine

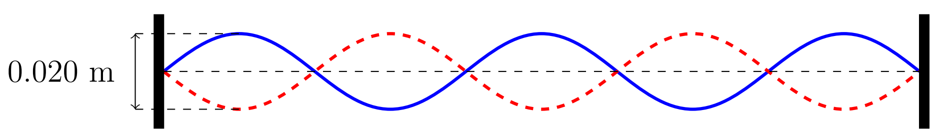


Figura 1.12

(a) Determine la tensión en la cuerda.

Usando la ecuación de la velocidad de propagación de las ondas mecánicas en una cuerda se tiene

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\rightarrow F = v^2\mu = \frac{v^2 m}{L} = \frac{(180\ \mathrm{m/s})^2 \cdot 0.020\ \mathrm{kg}}{1.5\ \mathrm{m}} = 432\ \mathrm{N}.$$

La tensión de la cuerda es 432 N.

(b) La longitud de onda y la frecuencia.

Para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda se debe cumplir

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}$$

donde para este caso se tiene $n = 5$, con lo que se obtiene

$$\lambda_5 = \frac{2L}{5} = \frac{2 \cdot 1.5\ \mathrm{m}}{5} = 0.60\ \mathrm{m}.$$

Usando la definición de velocidad de propagación

$$v = \lambda_n f_n$$

$$\rightarrow f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = \frac{180\ \mathrm{m/s}}{0.60\ \mathrm{m}} = 300\ \mathrm{Hz}.$$

La longitud de onda es 0.60 m y la frecuencia de oscilación es 300 Hz.

(c) Escriba la ecuación de la ondas estacionarias.
Se propone la ecuación de las ondas estacionarias

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)\,.$$

Para este caso se tiene

$$\omega \equiv 2\pi f = 2\pi \cdot 300\ \text{Hz} = 1884\ \text{rad/s},$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.60\ \text{m}} = 10.5\ \text{rad/m},$$

$$2A = 0.010\ \text{m}.$$

La ecuación de las ondas estacionarias es

$$y(x,t) = 0.010\ \text{m}\sin((10.5\ \text{rad/m})\,x)\sin((1884\ \text{rad/s})\,t)\,.$$

.

1.3 Problemas propuestos

1. La masa (0.500 kg) de un péndulo simple realiza 50 ciclos en 16 segundos. Si la energía mecánica total de la partícula es $E = 50$ J . Calcule:
   (a) El periodo de oscilación. R. 0.32 s.
   (b) La longitud de la cuerda. R. 0.025 m.
   (c) La velocidad máxima de la partícula. R. 14.1 m/s.
2. Un bloque de masa m unida a un resorte de constante $k = 20.0$ N/m realiza un movimiento armónico simple. La velocidad y aceleraciones máximas que alcanza dicho bloque son 0.252 m/s y 1.053 m/s^2. Se determina que en $t = 2.0$ s el bloque se encuentra en la posición -0.0527 **m** y en $t = 3.0$ s el bloque tiene una velocidad igual a -0.252 m/s. A partir de la información anterior determine:

(a) La frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de oscilación del bloque.

R. $\omega = 4.18$ rad/s, $f = 0.67$ Hz y $T = 1.50$ s.

(b) La masa del bloque. R. 1.14 kg.

(c) La amplitud de oscilación de la masa. R. 0.0603 m.

(d) La ecuación de la posición en función del tiempo para el bloque.

R. $x(t) = 0.060 \text{ m} \cos[(4.18 \text{ rad/s})\, t - 4.714 \text{ rad}]$.

Cuando se obtiene el "arccos" de un valor hay que considerar dos opciones, la primera opción es el valor que da la calculadora, y la segunda opción es $2\pi-$ el valor de la calculadora, no π como se dijo en clase

(e) Determine la distancia recorrida por el bloque en $t = 4.0$ s. R. 0.6541 m.

3. Una partícula realiza un movimiento armónico simple a lo largo de un segmento de 20 cm de longitud. La aceleración máxima de la masa es de 20 cm/s^2. Si en $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = -A$ determine:

(a) La amplitud y el periodo de movimiento. R. $A = 10$ cm, y $T = 4.44$ s.

(b) El ángulo de fase R. π rad.

(c) La ecuación de movimiento. R. $x(t) = 10 \text{ cm} \cos[(1.41 \text{ rad/s})\, t - \pi \text{ rad}]$

(d) Realice el gráfico de posición en función del tiempo.

(e) Determine la distancia recorrida por el bloque en $t = 4.0$ s. R. 38 cm.

4. La aceleración en función del tiempo de la masa puntual de un péndulo simple es descrita en la figura 1.13

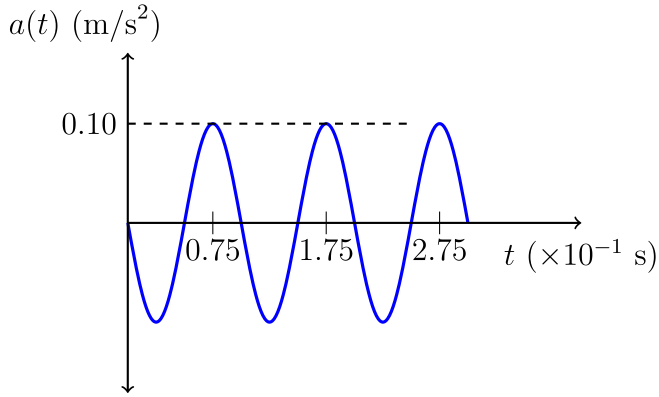


Figura 1.13: Aceleración en función del tiempo

A partir de la información anterior determine:

(a) La frecuencia angular y la amplitud del movimiento. R. $\omega = 62.8$ rad/s y $A = 2.54 \times 10^{-5}$ m.

(b) El ángulo de fase. R. $-\pi/2$ rad.

(c) La ecuación de movimiento. R. $x\,(t) = 2.54{\times}10^{-5}$ m cos $[(62.8 \text{ rad/s})\,t - \pi/2 \text{ rad}]$.

(d) Determine la velocidad de la masa en $t = 1.35$ s. R. -1.594×10^{-3} m/s.

5. Considere un sistema masa resorte formado por una masa $m_1 = 1.0$ kg y un resorte con constante $k_2 = 25$ N/m. Considere otro sistema masa-resorte formado por una segunda masa $m_2 = 1.5$ kg y un resorte con constante $k_2 = 25$ N/m. Los dos sistemas realizan un MAS y tienen la misma amplitud de movimiento $A = 1.0$ m. Si en $t = 0$ los dos masas se encuentran en $x = A$ determine:

(a) El periodo de oscilación de la cada masa. R. $T_1 = 1.26$ s, $T_2 = 1.54$ s.

(b) El ángulo de fase para cada masa R. $\phi = 0$.

(c) La ecuación de posición en función del tiempo de cada masa.
R. $x_1\,(t) = 1.0$ m cos $[(5.0 \text{ rad/s})\,t]$, $x_2\,(t) = 1.0$ m cos $[(4.08 \text{ rad/s})\,t]$.

(d) El desfase entre el movimiento de m_1 y m_2 en función del tiempo.
R. $0.92t$.

6. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y\,(x,t) = 5.0 \text{ mm} \cos\left[2\pi\left(0.30x - 3 - 0.50t - \pi\right)\right]$$

donde x está en milímetros y t en segundos. A partir de la información anterior determine

   (a) Hallar el desplazamiento vertical de una partícula de la cuerda en $x = 0,5$ m y $t = 0,15$ s. R. 4.57 mm

   (b) Hallar la velocidad de propagación de la onda. R. 1.67 m/s

   (c) Hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda en función de x y t.
   R. $v_y\,(x,t) = 15.7 \text{ mm/s} \sin\left[2\pi\left(0.30x - 3 - 0.50t - \pi\right)\right]$

   (d) Hallar la ecuación de una onda que sumada a $y(x,t)$ produzca ondas estacionarias en la cuerda.
   R. $y_1\,(x,t) = 5.0 \text{ mm} \cos\left[2\pi\left(0.30x - 3 + 0.50t - \pi\right)\right]$

7. Una onda transversal está descrita por la función

$$y\,(x,t) = 0.120 \text{ m} \sin\left(\frac{\pi x}{8} + 4\pi t\right)$$

donde x está en milímetros y t en segundos. A partir de la información anterior determine

   (a) La velocidad y aceleración transversal de la onda en $t = 0.2$ s para el punto de la cuerda $x = 1.60$ m. R. -1.51 m/s.

   (b) La longitud de onda, período y velocidad de propagación de la onda. R. $\lambda = 16$ m ; $T = 0.5$ s; $v = 32.0$ m/s.

   (c) ¿En qué dirección viaja la onda? Justifique su respuesta. R. viaja en la dirección $-x$.

   (d) Construya la gráfica $y\,(1 \text{ m}, t)$ en función del tiempo.

8. Una carrucha contiene una de cuerda de cobre de 20.0 m y una masa de 0.141 kg. De dicha carrucha se corta un segmento de cobre de 1.0 m de largo y el mismo se fija de sus dos extremos. La tensión que actúa sobre dicho segmento es de 200 N y el mismo se pone a oscilar de manera tal que se generan ondas estacionarias las cuales tiene una frecuencia de oscilación de 421 Hz. A partir de la información anterior determine:

(a) La velocidad de propagación de las ondas viajeras que componen a la onda estacionaria. R. 168.4 m/s.

(b) La distancia de separación entre dos nodos adyacentes. R. 0.200 m.

(c) ¿Cuántos nodos hay en la cuerda? R. 6.

(d) La función de posición de la onda estacionaria si la amplitud de las ondas viajeras que la componen es de 0.75 cm. R. $y\left(x,t\right) = 1.5\ \text{m}\sin\left(5\pi x\right)\sin\left(842\pi t\right)$.

(e) Dibuje el patrón de las ondas estacionarias observado.

9. Se forma una onda estacionaria en una cuerda de 2.0 m fija en ambos extremos. La onda estacionaria tiene una frecuencia de 10 Hz que corresponde a dos veces la frecuencia fundamental. Suponga que la función de onda de la onda estacionaria es $y\left(x,t\right) = 2A\sin\left(kx\right)\sin\left(\omega t\right)$

   (a) Calcule la velocidad de propagación de las ondas que interfieren. R. 20.0 m/s.

   (b) Calcule los tiempos para los cuales la amplitud de los antinodos en nula. R. $\frac{m}{2}T$, m es un número natural.

   (c) Obtenga la velocidad transversal en el segundo nodo y en el primer antinodos para $t = 0.3345$ s si la amplitud es de 30 cm. R. segundo nodo $v_y = 0$ y en el primer antinodo es $v_y = 31.18$ m/s.

10. Una cuerda que está sujeta bajo una tensión de 200 N y fija en los puntos extremos oscila en el segundo armónico mediante la ecuación

$$y\left(x,t\right) = 0.10\ \text{m}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(12\pi t\right)$$

A partir de la información anterior determine:

   (a) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?. R. 4 m.

   (b) La velocidad de las ondas en la cuerda. R. 24 m/s.

   (c) ¿Cuál es la masa de la cuerda? R. 1.4 kg.

   (d) Dibuje el patrón formado por la cuerda.

   (e) Si la cuerda oscilara en el tercer armónico ¿Cuál sería su período oscilación? R. 0.11 s.

2

Mecánica de fluidos

2.1 Hidrostática

1. Determine la presión manométrica en el punto "A" del depósito mostrado en la figura 2.1. La densidad del aceite es 820kg/m^3, además h_1 = 20.0 cm y h_2 = 10.0 cm

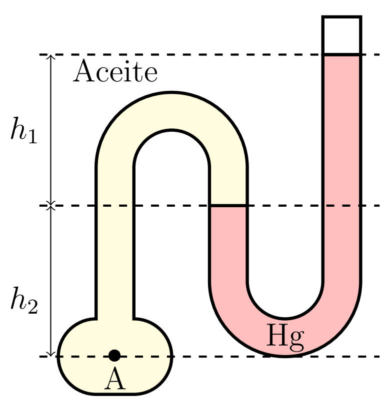


Figura 2.1

Usando el principio de Pascal se determina la presíón en la interfaz aceite-mercurio

$$p_I - p_0 = -g\rho_{Hg}\left(y_I - y_0\right)$$

$$\rightarrow p_I = g\rho_{Hg}h_1$$

donde de acuerdo con la figura 2.2

$$y_O = h_1 + h_2,$$

$$y_I = h_2.$$

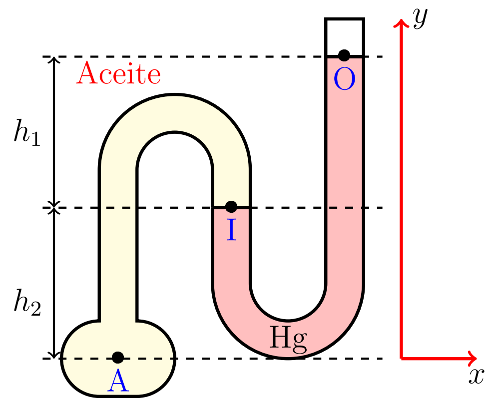


Figura 2.2

Con lo anterior se obtiene

$$p_I = 9.8\ \text{m/s}^2 \cdot 13600\ \text{kg/m}^3 \cdot 0.200\ \text{m} = 26.7 \times 10^3\ \text{Pa}.$$

Finalmente usando el principio de Pascal se determina la presión en el punto "A"

$$p_A - p_I = -g\rho_{aceite}\left(y_A - y_B\right)$$
$$\rightarrow p_A = p_I + g\rho_{Hg}h_2$$

donde de acuerdo con la figura 2.2

$$y_I = h_2,$$
$$y_A = 0.$$

con lo que se obtiene

$$p_A = 26.7 \times 10^3\ \text{Pa} + 9.8\ \text{m/s}^2 \cdot 820\ \text{kg/m}^3 \cdot 0.100\ \text{m} = 27.5 \times 10^3\ \text{Pa}$$

La presión manométrica en el punto A es 27.5×10^3 Pa

2. Determine la fuerza hidrostática que ejercen dos fluidos diferentes con densidades, $\rho_A = 1000\text{kg/m}^3$ y $\rho_B = 500\text{kg/m}^3$ sobre una ventana rectangular de $2,00$ m de ancho y de $1,00$ m alto y con dos de sus lados paralelos alineados con la horizontal, que está a $0,500$ m bajo la superficie en una cara lateral de un depósito cúbico colocado sobre una superficie horizontal, lleno de fluido y abierto a la atmósfera. El fluido ρ_B alcanza una profundidad de $0,750$ m medida desde la superficie, mientras que el fluido ρ_A, alcanza una profundidad de $2,00$ m, desde la interfaz hasta el fondo del cubo

   Primero se determina la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo en la figura 2.3

$$F_B = \int_A p dA.$$

   Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista el fluido B

$$p_B - p_0 = -g\rho_B\left(y_B - y_0\right)$$
$$\rightarrow p_B = p = g\rho_B y.$$

   donde de acuerdo con la figura 2.3

$$y_0 = 0,$$

$$y_B = -y.$$

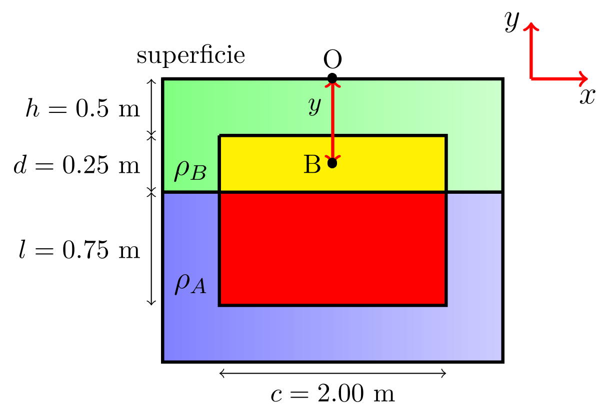


Figura 2.3

   El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = cdy.$$

   Se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo de la figura 2.3

$$F_B = \int_A p dA = \int_h^{h+d} (g\rho_B y)\, c dy$$
$$= g\rho_B c \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_h^{h+d}$$
$$= g\rho_B c \left(\frac{\left[(h+d)^2 - h^2\right]}{2}\right).$$

Usando la información de la figura 2.3 se obtiene

$$F_B = 1.53 \times 10^3 \text{ N}.$$

A continuación se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo en la figura 2.4

$$F_A = \int_A p dA.$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista el fluido A

$$p_A - p_I = -g\rho_A (y_A - y_I)$$
$$p_A = p = p_I + g\rho_A (y - (h+d)),$$

donde de acuerdo con la figura 2.3

$$y_I = -(h+d),$$

$$y_A = -y.$$

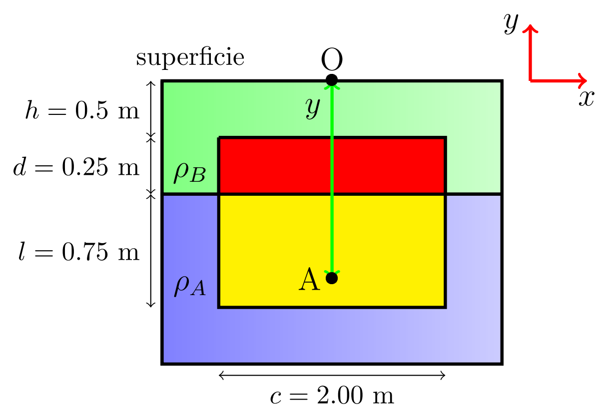


Figura 2.4

Además se tiene, usando el principio de Pascal que

$$p_I = g\rho_B (h+d)$$

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = cdy.$$

Se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo de la figura 2.4

$$\begin{aligned}
F_A &= \int_A pdA \\
&= \int_{h+d}^{h+d+l} \left(p_I + g\rho_A \left(y - (h+d)\right)\right) cdy \\
&= \int_{h+d}^{h+d+l} \left(g\rho_B \left(h+d\right) + g\rho_A \left(y - (h+d)\right)\right) cdy \\
&= gcl \left(\rho_B - \rho_A\right)\left(h+d\right) + g\rho_A c \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{h+l}^{h+d+l} \\
&= gcl \left(\rho_B - \rho_A\right)\left(h+d\right) + g\rho_A c \left(\frac{\left[(h+d+l)^2 - (h+l)^2\right]}{2}\right)
\end{aligned}$$

Usando la información de la figura 2.4 se obtiene

$$F_A = 11.0 \times 10^3 \text{ N}.$$

Finalmente se detrmina la fuerza hidróstática total que actúa sobre la ventana

$$\begin{aligned}
F &= F_B + F_A \\
&= 1.53 \times 10^3 \text{ N} + 11.0 \times 10^3 \text{ N} = 12.53 \times 10^3 \text{ N}
\end{aligned}$$

La fuerza hidrostática sobre la ventana es $= 12.53 \times 10^3$ N

3. Un depósito contiene aceite $(D.R = 3.0)$ y agua. Una de las paredes del deposito tiene las dimensiones de la figura 2.5. Encuentre la fuerza resultante hidrostática sobre dicha pared.

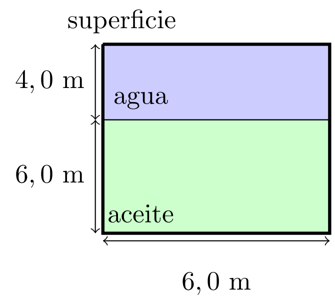


Figura 2.5

Para este caso se tiene que el aceite esta en el fondo pues su densidad es mayor que la del agua. La fuerza total de los fluidos sobre la pared se determina

$$F_{pared} = F_{agua} + F_{aceite}.$$

Primero se determina la fuerza del agua sobre la pared. Usando la definición de fuerza hidrostática se tiene

$$F_{agua} = \int_A p dA.$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista agua

$$p_A - p_0 = -g\rho_{agua}(y_A - y_0)$$
$$\rightarrow p_A = p = g\rho_{agua}y,$$

donde de acuerdo con la figura 2.6

$$y_0 = 0 y_A = -y$$

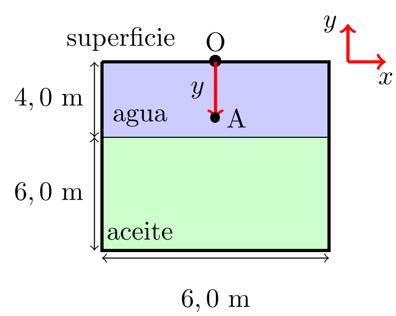


Figura 2.6

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = xdy$$

donde $x = 6,0$ m.
Se cálcula la fuerza hidrostática que ejerce el agua sobre la pared

$$F_{agua} = \int_A pdA = \int_0^{4.0\ \mathrm{m}} (g\rho_{agua} y)\, xdy = (g\rho_{agua} x)\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{4.0\ \mathrm{m}}.$$

Usando la información de la figura 2.6 se obtiene

$$F_{agua} = 4.7 \times 10^5\ \mathrm{N}.$$

Se calcula a continuación la fuerza del aceite sobre la pared. Usando la definición de fuerza hidrostática se tiene

$$F_{aceite} = \int_A pdA.$$

Usando el principio de Pascal se determina la presión en la interfaz agua-aceite

$$p_I - p_0 = -g\rho_{agua}(y_I - y_0)$$

$$\rightarrow p_I = g\rho_{Hg} h_1.$$

donde de acuerdo con la figura 2.7

$$y_O = 0,$$

$$y_I = h_1 = 4.0\ \mathrm{m}.$$

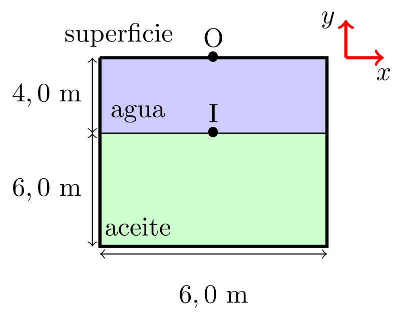


Figura 2.7

Con lo que se obtiene

$$p_I = 9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 4.0\ \mathrm{m} = 3.9 \times 10^4\ \mathrm{Pa}.$$

Ahora, usando de nuevo el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista aceite

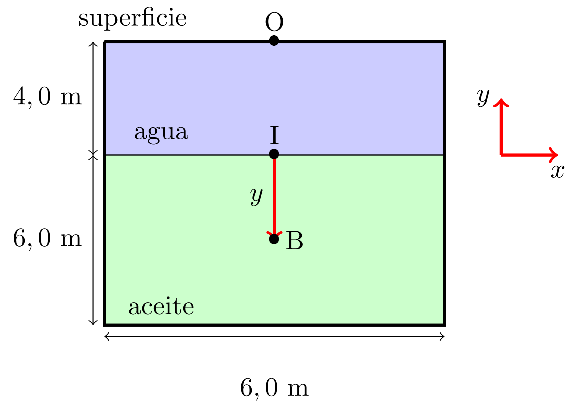


Figura 2.8

$$p_B - p_I = -g\rho_{aceite} y$$
$$\rightarrow p_B = p = p_I + g\rho_{aceite} y.$$

Para este caso el área de la pared que esta en contacto con el aceite es

$$A = 6.0 \text{ m} \cdot 6.0 \text{ m} = 36 \text{ m}^2$$

y el diferencial de área tiene la forma

$$dA = xdy,$$

donde $x = 6,0$ m.
Se obtiene la fuerza hidrostática del aceite que actúa sobre la pared

$$F_{aceite} = \int_A pdA = p_I A + \int_0^{6.0 \text{ m}} g\rho_{aceite} yxdy = p_I A + g\rho_{aceite} x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{6.0 \text{ m}}$$

Usando la información de la figura 2.8 se obtiene

$$F_{aceite} = 4.6 \times 10^6 \text{ N}.$$

Finalmente se obtiene la fuerza total que actúa sobre la pared

$$F_{pared} = F_{agua} + F_{aceite} = 4.7 \times 10^5 \text{ N} + 4.6 \times 10^6 \text{ N} = 5.1 \times 10^6 \text{ N}.$$

La fuerza hidrostática que actúa sobre la pared es 5.1×10^6 N

.

4. Un depósito de agua tiene, en uno de sus extremos, una compuerta como la que se muestra en la figura (2.9), donde $h_1 = 1,0$ m y $L = 2,0$ m. Calcule la fuerza que ejerce la presión hidrostática, debida al agua, sobre la compuerta.

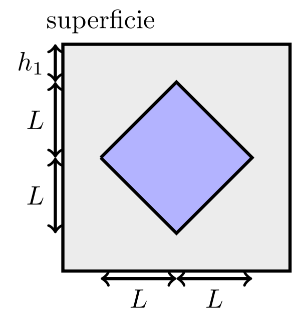


Figura 2.9

Para este caso se puede dividir el rombo en cuatro triángulos iguales. Primero se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre el triangulo de color rojo en la figura 2.10

$$F_R = \int_A p dA.$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista agua

$$p_a - p_0 = -g\rho_{agua}\left(y_A - y_0\right),$$
$$\rightarrow p_a \equiv p = g\rho_{agua}\left(L + h_1 - y\right)$$

donde de acuerdo con la figura 2.10

$$y_0 = L + h_1.$$

$$y_A = y,$$

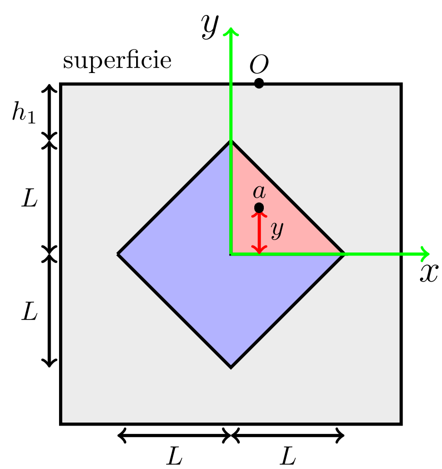


Figura 2.10

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = xdy = \left(\frac{y-b}{m}\right) dy$$

donde de acuerdo con la figura 2.10 se tiene

$$m = \frac{L}{-L} = -1,$$
$$b = y - mx = L.$$

Se calcula la fuerza hidrostática sobre el tríangulo rojo

$$\begin{aligned} F_R = \int_A p dA = \int_0^L g\rho_{agua} \left(L + h_1 - y\right) \left(L - y\right) dy \\ &= g\rho_{agua} \left(\left(L + h_1\right) Ly - \frac{\left(L + h_1\right) y^2}{2} - \frac{Ly^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^L \\ &= g\rho_{agua} \left(\left(L + h_1\right) L^2 - \frac{\left(L + h_1\right) L^2}{2} - \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{3} \right) \\ &= g\rho_{agua} \left(\frac{h_1 L^2}{2} + \frac{L^3}{3} \right). \end{aligned}$$

A partir de la información del problema se tiene $h_1 = L/2$, lo que lleva a

$$F_R = \frac{7}{12} g\rho_{agua} L^3.$$

A continuación se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta triangular amarilla de la figura 2.11 Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista agua

$$p_b - p_0 = -g\rho_{agua} \left(y_b - y_0\right)$$
$$\rightarrow p_b \equiv p = g\rho_{agua} \left(2L + h_1 - y\right)$$

donde de acuerdo con la figura 2.11

$$y_0 = 2L + h_1,$$

$$y_B = y.$$

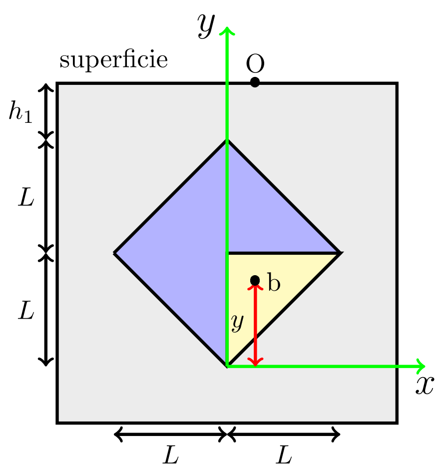


Figura 2.11

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = xdy = \left(\frac{y-b}{m}\right) dy$$

donde de acuerdo con la figura 2.11 se tiene

$$m = \frac{L}{L} = 1,$$
$$b = y - mx = 0.$$

Se calcula la fuerza hidrostática sobre el área amarilla

$$F_A = \int_A p dA = \int_0^L g\rho_{agua} (2L + h_1 - y) y dy$$
$$= g\rho_{agua} \left(\frac{(2L+h_1)y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^L$$
$$= g\rho_{agua} \left(\frac{2L^3}{3} + \frac{h_1 L^2}{2}\right).$$

De la información del problema se tiene $h_1 = L/2$, con lo que se obtiene

$$F_A = \frac{11}{12} g\rho_{agua} L^3$$

Finalmente, la fuerza total sobre compuerta se determina

$$F_T = 2(F_R + F_A) 2\left(\frac{7}{12} g\rho_{agua} L^3 + \frac{11}{12} g\rho_{agua} L^3\right)$$
$$= 3 g\rho_{agua} L^3$$
$$= 3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (2.00 \text{ m})^3$$
$$= 2.35 \times 10^5 \text{ N}$$

La fuerza neta que actúa sobre la compuerta es de 2.35×10^5 N

5. Una piscina rectangular tiene una profundidad variable de h a $2h$, tal y como se muestra en la figura 2.12, donde $h = 1.5$ m, $a = 7.0$ m y $b = 16.0$ m. Calcule la fuerza hidrostática total que ejerce el agua sobre el fondo de dicha piscina.

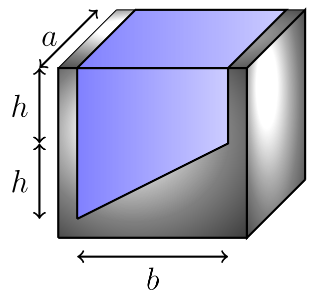


Figura 2.12

Para este caso se tiene

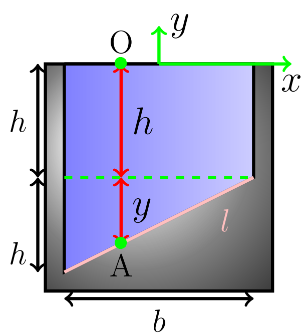


Figura 2.13: vista lateral de la piscina

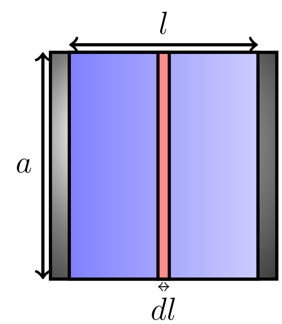


Figura 2.14: vista superior de la piscina

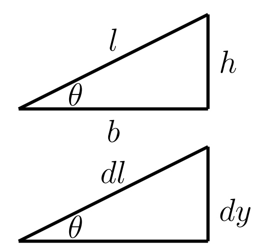


Figura 2.15: Algunas relaciones

La fuerza hidrostática se determina

$$F = \int_A p dA$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista agua

$$p_A - p_0 = -g\rho_{agua}\left(y_A - y_0\right)$$
$$\rightarrow p_A = p = g\rho_{agua}\left(y + h\right)$$

donde de acuerdo con la figura 2.13

$$y_0 = 0$$
$$y_A = -\left(h + y\right)$$

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = adl$$

donde de acuerdo con las figuras 2.14 y 2.15

$$\begin{aligned}
a &= 7.0 \text{ m} \\
\sin\theta &= \frac{1.5 \text{ m}}{\sqrt{(1.5 \text{ m})^2 + (16.0 \text{ m})^2}} \sim 0.093 \\
dl &= \frac{dy}{\sin\theta} \\
A &= al = 7.0 \text{ m} \cdot 16.0 \text{ m} = 112 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la fuerza hidrostática sobre el fondo de la piscina.

$$\begin{aligned}
F &= \int_A pdA \\
&= \int_A g\rho_{agua} (h + y)\, dA \\
&= \int_A g\rho_{agua} hdA + \int_A g\rho_{agua} ydA \\
&= g\rho_{agua} hA + \int_0^{h_1} (g\rho_{agua} y) \left(\frac{ady}{\sin\theta}\right) \\
&= g\rho_{agua} hA + \left(\frac{g\rho_{agua} a}{\sin\theta}\right) \frac{y^2}{2}\Big|_0^{h_1} \\
&= g\rho_{agua} \left(hA + \frac{ah_1^2}{2\sin\theta}\right) \\
&= 2.48 \times 10^6 \text{ N}
\end{aligned}$$

La fuerza hidrostática que actúa sobre la pared es 2.48×10^6 N

6. En la cara lateral de una piscina de un acuario hay una ventana forrada con plástico de color rojo, tal y como se muestra en la figura 2.16, donde $h = 4.0$ m, $L = 2.0$ m y $c = 3.0$ m. Dentro de la piscina hay dos fluidos con densidades $\rho_A = 750$ kg/m^3 y $\rho_B = 950$ kg/m^3.

   Determine la fuerza hidrostática de los dos fluidos sobre la ventana.

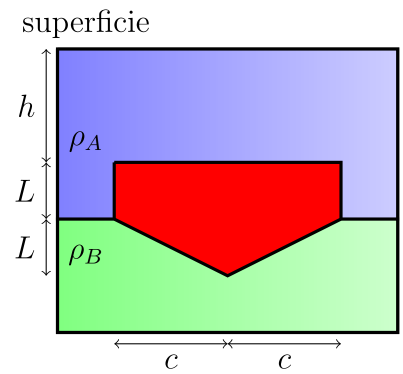


Figura 2.16

Primero se determina la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo en la figura 2.17

$$F_A = \int_A p dA$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista el fluido A

$$p_A - p_0 = -g\rho_A (y_A - y_0)$$
$$\rightarrow p_A = p = g\rho_A y$$

donde de acuerdo con la figura 2.17

$$y_0 = 0,$$

$$y_A = -y.$$

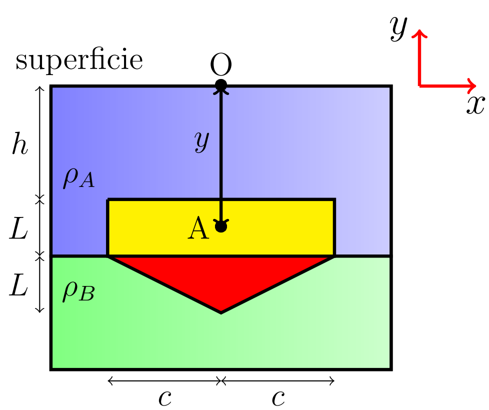


Figura 2.17

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = 2bdy.$$

Se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre el rectángulo de color amarillo

$$F_A = \int_A p dA = \int_h^{h+L} (g\rho_A y)\, 2b dy = 2g\rho_A b \left(\frac{\left[(h+L)^2 - h^2\right]}{2} \right).$$

Usando la información del enunciado se obtiene

$$F_A = 4.41 \times 10^5 \text{ N}.$$

A continuación se calcula la fuerza sobre la compuerta triángular amarilla.

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la pared donde exista el fluido B

$$p_B - p_I = -g\rho_B (y_B - y_I)$$
$$\rightarrow p_B = p = p_I + g\rho_B (y - h - L)$$

donde de acuerdo con la figura 2.18

$$y_I = -(h+L),$$

$$y_B = -y,$$

$$p_I = 44100 \text{ Pa}.$$

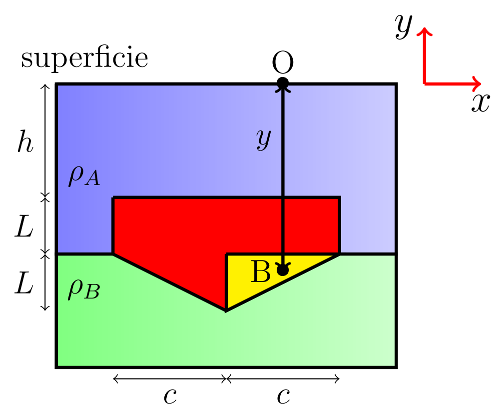


Figura 2.18

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = x dy$$
$$= \left(\frac{y-b}{m} \right) dy,$$

donde de acuerdo con la figura 2.18

$$m = \frac{(h+2L) - (h+L)}{0-c} = -\frac{L}{c},$$
$$b = y - mx = h + 2L.$$

Se calcula la fuerza hidrostática que actúa sobre la ventana triangular amarilla de la figura 2.18

$$
\begin{aligned}
F_B &= \int_A p dA \\
&= \int_A \left(p_I + g\rho_B\left(y - h - L\right)\right) dA \\
&= \left(p_I - g\rho_B\left(h + L\right)\right) A - \int_{h+L}^{h+2L} \left(g\rho_B y\right) \frac{c\left(y - \left(h + 2L\right)\right)}{L} dy \\
&= \left(p_I - g\rho_B\left(h + L\right)\right) \frac{cL}{2} - \frac{cg\rho_B}{L} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\left(h + 2L\right) y^2}{2}\right)\Bigg|_{h+L}^{h+2L} \\
&= \left(p_I - g\rho_B\left(h + L\right)\right) \frac{cL}{2} \\
&\quad - \frac{cg\rho_B}{L} \left(\frac{\left(h + 2L\right)^3 - \left(h + L\right)^3}{3} - \frac{\left(h + 2L\right)\left[\left(h + 2L\right)^2 - \left(h + L\right)^2\right]}{2}\right) \\
&= 1.51 \times 10^5 \text{ N}.
\end{aligned}
$$

La fuerza total sobre la ventana se determina

$$
\begin{aligned}
F_T &= F_A + 2F_B \\
&= 4.41 \times 10^5 \text{ N} + 2 \cdot 1.51 \times 10^5 \text{ N} \\
&= 7.42 \times 10^5 \text{ N}
\end{aligned}
$$

La fuerza hidrostática que actúa sobre la ventana es 8.13×10^5 N

7. Un depósito de agua tiene, en uno de sus extremos, una compuerta de forma circular, tal como se indica en la figura 2.19. Calcule la fuerza que ejerce la presión hidrostática, debida al agua, sobre la compuerta.

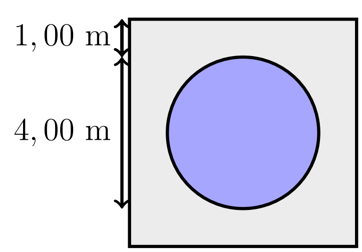


Figura 2.19

Usando la definición de fuerza hidrostática se tiene

$$F_{agua} = \int_A p dA.$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la función de la presión sobre cualquier punto de la compuerta

$$p_A - p_0 = -g\rho_{agua}\left(y_A - y_0\right)$$
$$\rightarrow p_A = p = g\rho_{agua}\left(h + y\right),$$

donde a partir de la figura 2.20

$$y_0 = 0,$$

$$y_A = -\left(h + y\right) \rightarrow h = 3.00 \text{ m.}$$

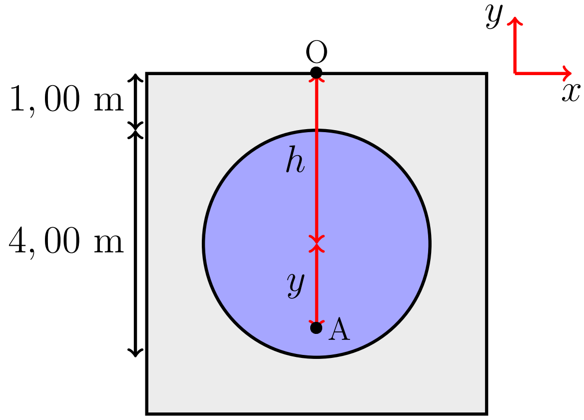


Figura 2.20

El diferencial de área para este caso tiene la forma

$$dA = xdy = 2\sqrt{R^2 - y^2}dy,$$

donde el "2" se utiliza debido a la simetría horizontal del problema
Se calcula la fuerza hidrostática

$$\begin{aligned} F_{agua} = \int_A pdA &= \int_A \left(g\rho_{agua}\left(h + y\right)\right) dA \\ &= \int_A \left(g\rho_{agua}h\right) dA + \int_A \left(g\rho_{agua}y\right) dA \\ &= \left(g\rho_{agua}h\right) A + \int_{-R}^{R} \left(g\rho_{agua}y\right)\left(2\sqrt{R^2 - y^2}dy\right). \end{aligned}$$

La segunda integral de la derecha es cero, lo que lleva a

$$F_{agua} = \left(g\rho_{agua}h\right) A = g\rho_{agua}h\pi R^2 = 3.69 \times 10^5 \text{ N.}$$

La fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta es 3.69×10^5 N

8. En un recipiente se deposita un fluido de densidad $\rho = 800\ \mathrm{kg/m^3}$. El recipiente tiene una ventana en forma de triángulo isósceles tal y como se muestra en la figura. Determine La fuerza hidrostática que ejerce el fluido sobre la ventana.

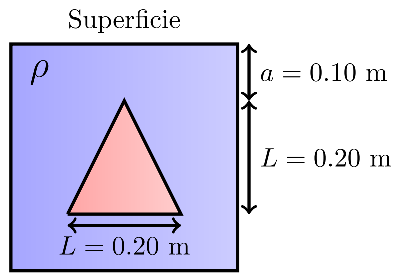


Figura 2.21

La fuerza hidrostática se define como

$$F = \int_A p dA$$

donde usando el principio de Pascal se determina la presión en cualquier punto donde se encuentra la ventana

$$p = \rho g \left(L + a - y\right)$$

Por otro lado el diferencial de área para este caso viene dado por

$$dA = 2xdy = 2\left(\frac{y-b}{m}\right)dy$$

donde el "2" se utiliza debido a la simetría horizontal del problema y además para este caso se tiene

$$m = \frac{L}{-L/2} = -2, \qquad\qquad b = L.$$

con lo que se obtiene

$$F = \int_A p dA = \int_0^L \rho g \left(L + a - y\right)\left(L - y\right)dy = \rho g \left(\frac{aL^2}{2} + \frac{L^3}{3}\right) = 36.6\ \mathrm{N}$$

La fuerza hidrostática que actúa sobre la ventana es de 36.6 N.

9. En un recipiente se depositan dos fluidos no miscibles de densidades $\rho_1 = 800$ kg/m^3 y $\rho_2 = 1200$ kg/m^3. El recipiente tiene una ventana en forma de triángulo isósceles tal y como se muestra en la figura 2.22

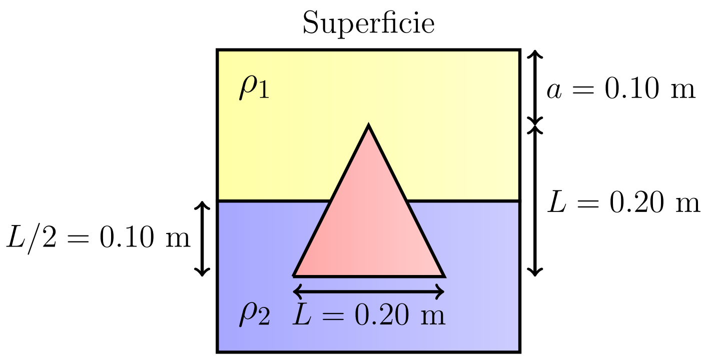


Figura 2.22

Determine

(a) La fuerza hidrostática que ejerce el fluido 1 sobre la ventana.

La fuerza hidrostática para este caso se define como

$$F_1 = \int p_1 dA$$

donde usando el principio de Pascal se determina la presión en cualquier punto donde se encuentra la ventana (pero donde hay solo del fluido 1)

$$p_1 = \rho_1 g \left(L/2 + a - y\right)$$

el diferencial de área para este caso viene dado por

$$dA = 2xdy = 2\left(\frac{y-b}{m}\right)dy$$

donde el "2" se utiliza debido a la simetría horizontal del problema

$$m = \frac{L/2}{-l/4} = -2, \qquad b = L/2 \text{ m.}$$

con lo que se obtiene

$$F_1 = \int_A p_1 dA = \int_0^{L/2} \rho_1 g \left(L/2 + a - y\right)\left(L/2 - y\right) dy$$

$$= \rho_1 g \left(aL^2/8 + L^3/24\right) = 6.53 \text{ N}$$

La fuerza hidrostática que ejerce el fluido 1 sobre la ventana es de 6.53 N.

(b) La fuerza hidrostática que ejerce el fluido 2 sobre la ventana.

Primero se determina la presión en la interfaz usando el Principio de Pascal

$$p_I = p_0 + \rho_1 g y = \rho_1 g \left(L/2 + a\right)$$

La fuerza hidrostática para este caso se define como

$$F_2 = \int p_2 dA$$

donde usando el principio de Pascal se determina la presión en cualquier punto donde se encuentra la ventana (pero donde esta solo del fluido 2)

$$p_2 = p_I + \rho_2 g \left(L/2 - y\right) = \rho_1 g \left(L/2 + a\right) + \rho_2 g \left(L/2 - y\right)$$

Para este caso dividimos el área de la ventana de la siguiente forma

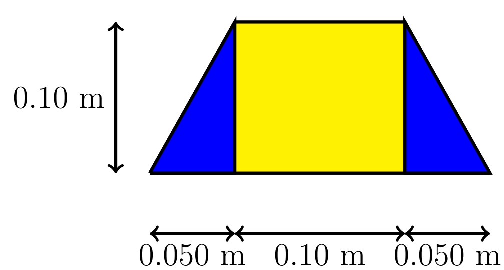


Figura 2.23

El área total de la parte de la ventana es $A = 0.015$ m^2. Además el diferencial de área para la parte rectangular viene dada por

$$dA_R = xdy = L/2dy.$$

El diferencial para la parte triangular viene dado por

$$dA_T = 2xdy = 2\left(\frac{y-b}{m}\right)dy,$$

donde

$$m = \frac{L/2}{-L/4} = -2, \qquad b = L/2,$$

con lo que se obtiene el diferencial total de área

$$dA = dA_R + dA_T.$$

Finalmente la fuerza hidrostática ejercida por el fluido 2 viene dada por

$$\begin{aligned}F_2 = \int_A p_2 dA =& g\left[\int\left((\rho_1+\rho_2)\frac{L}{2}+\rho_1 a\right)dA - \frac{L}{2}\int_0^{L/2}\rho_2 y dy\right.\\ &\left.-\int_0^{L/2}\rho_2 y\left(\frac{L}{2}-y\right)dy\right]\\ =& g\left[\frac{3}{8}\rho_1 L^2\left(\frac{L}{2}+a\right)+\frac{5}{48}\rho_2 L^3\right]\\ =& \ 33.3 \text{ N}\end{aligned}$$

La fuerza hidrostática que ejerce el fluido 2 sobre la ventana tiene una magnitud igual a 21.52 N.

(c) La fuerza hidrostática que ejercen los dos fluidos sobre la ventana

La fuerza hidrostática total que ejercen los fluidos sobre la ventana se determina

$$F_T = F_1 + F_2 = 6.53 \text{ N} + 21.52 \text{ N} = 28.05 \text{ N}$$

La fuerza hidrostática total que ejercen los fluidos sobre la ventana es de 28.05 N.

10. Un bloque de madera tiene una masa de 3.70 kg y una densidad de 594 kg/m^3. A este bloque se le adhiere, en su parte inferior (tal y como se muestra en la figura 2.24 , un bloque de plomo cuya densidad es de $1,11 \times 10^4$ kg/m^3. ¿Qué masa de plomo se debe adherir a la madera para que un 83,3 % del volumen de ésta se sumerja?

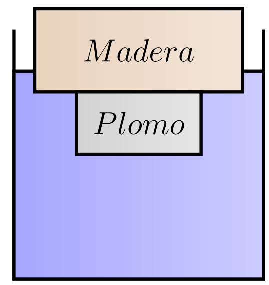


Figura 2.24

Aplicando las leyes de Newton se tiene

$$\sum F_y = F_{EM} + F_{EPb} - m_{total} g = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} F_{EM} &= 0.83 g \rho_{H_2O} V_M = \frac{0.83 g \rho_{H_2O} m_M}{\rho_M}, \\ F_{EPb} &= g \rho_{H_2O} V_{pb} = \frac{g \rho_{H_2O} m_{pb}}{\rho_{Pb}}, \\ m_{total} &= m_M + m_{pb}, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene

$$\sum F_y = \frac{0.83 g \rho_{H_2O} m_M}{\rho_M} + \frac{g \rho_{H_2O} m_{pb}}{\rho_{Pb}} - (m_M + m_{pb})\, g = 0.$$

Se resuelve para m_{Pb}

$$\begin{aligned} m_{pb} &= \frac{\left(\frac{0.83 \rho_{H_2O} m_M}{\rho_M} - m_M \right)}{1 - \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Pb}}} \\ &= 1.62 \text{ kg} \end{aligned}$$

La masa de plomo se debe adherir a la madera para que un 83,3 % del volumen de ésta se sumerja es 1.62 kg

11. Un bloque cúbico de madera de 0.20 m de lado flota en la interfaz entre dos fluidos ρ_1 y $\rho_2 = 2\rho_1$ de tal forma que su superficie superior está a 0.05 m bajo la superficie del fluido 1 y su superficie inferior 0.05 m bajo la interfaz. La densidad del bloque es 800 kg/m^3. Determine:

    (a) La densidad de los dos fluidos.

    Haciendo suma de fuerzas sobre el bloque se tiene

$$\sum F_y = F_{E1} + F_{E2} - mg = 0$$

$$= \rho_1 V_{S1} g + \rho_2 V_{S2} g - \rho_B V_T g = 0$$

$$= \rho_1 l^2 (l - y) g + 2\rho_1 l^2 y g - \rho_B l^3 g = 0.$$

    lo que lleva a

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{l}{(l+y)} \rho_B \\ &= \left(\frac{0.20}{0.25} \right) \cdot 800 \text{ kg/m}^3 \\ &= 640 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

    de acuerdo con la información del problema

$$\rho_2 = 2\rho_1 = 1280 \text{ kg/m}^3$$

    Las densidades de los fluidos 1 y 2 son 640 kg/m^3 y 1280 kg/m^3 respectivamente.

    (b) La fuerza de empuje que actúa sobre el cubo.

    La fuerza de empuje que actúa sobre el cubo se determina

$$F_{Etotal} = F_{E1} + F_{E2} = \rho_B l^3 g = 62.7 \text{ N}.$$

La fuerza de empuje que actúa sobre el cubo tiene una magnitud igual a 62.7 N.

(c) La fuerza hidrostática total de los fluidos que actúa sobre el cubo.

Para este caso todas las fuerzas hidrostáticas sobre las caras laterales del cubo se anulan, las únicas fuerzas que no se anulan son las de las caras superior e inferior por lo que se tiene

$$\begin{aligned} F_T &= \rho_1 g h l^2 + (\rho_1 g(l-y) + \rho_2 g y)\, l^2 \\ &= (\rho_1(h-y+l) + \rho_2 y)\, g l^2 \\ &= 62.7 \text{ N.} \end{aligned}$$

La fuerza hidrostática total de los fluidos que actúa sobre el cubo tiene una magnitud igual a 62.7 N.

12. Una esfera que esta formada por dos materiales diferentes se encuentra en equilibrio en la interfaz de dos fluidos con densidades $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_2 = 500 \text{ kg/m}^3$ tal y como se muestra en la figura, donde $R_a = 4.57$ cm y $R_b = 2.88$ cm. Si la relación entre las densidades de los materiales de la esfera es $\rho_a = \frac{2}{3}\rho_b$ determine la masa y la densidad de cada material que forma dicha esfera.

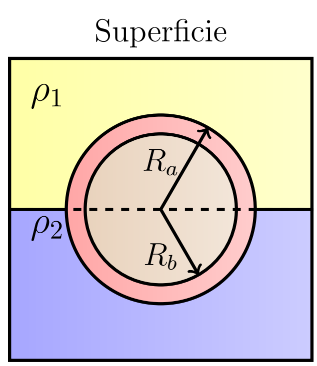


Figura 2.25

Primero se calcula el volumen de cada material

$$V_b = \frac{4}{3}\pi R_b^3 = \frac{4}{3}\pi(2,88\ \text{cm})^3 \sim 100\ \text{cm}^3,$$

$$V_a = \frac{4}{3}\pi\left(R_a^3 - R_b^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left((4.57\ \text{cm})^3 - (2.88\ \text{cm})^3\right) \sim 300\ \text{cm}^3$$

donde se puede ver

$$V_a = 3V_b$$

Aplicando las leyes de Newton

$$F_{E1} + F_{E2} - W = 0,$$

lo que lleva a

$$\frac{(V_a + V_b)}{2}\rho_1 g + \frac{(V_a + V_b)}{2}\rho_2 g - (\rho_a V_a + \rho_b V_b)\, g = 0$$

$$\rightarrow \frac{(V_a + V_b)}{2}(\rho_1 + \rho_2) = (\rho_a V_a + \rho_b V_b)$$

$$\rightarrow \frac{(3V_b + V_b)}{2}(\rho_1 + \rho_2) = (3\rho_a + \rho_b)\, V_b$$

$$\rightarrow 2V_b(\rho_1 + \rho_2) = \left(3\left(\frac{2}{3}\rho_b\right) + \rho_b\right) V_b$$

$$\rightarrow 2(\rho_1 + \rho_2) = 3\rho_b$$

$$\rightarrow \rho_b = \frac{2}{3}\left(1000\ \text{kg/m}^3 + 500\ \text{kg/m}^3\right)$$

$$\rightarrow \rho_b = 1000\ \text{kg/m}^3.$$

con lo que se obtiene

$$\rho_a = 667\ \text{kg/m}^3$$

Finalmente usando a definición de densidad se determina la masa de cada material

$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$\Rightarrow m_a = \rho_a V_a = 0.200 \text{ kg}$$
$$\Rightarrow m_b = \rho_b V_b = 0.100 \text{ kg}$$

La masa y la densidad del material a son 0.200 kg y $\rho_a = 667 \text{ kg/m}^3$ respectivamente, La masa y la densidad del material b son 0.100 kg y $\rho_b = 1000 \text{ kg/m}^3$ respectivamente.

2.2 Dinámica

1. Una bebida no alcohólica (principalmente agua) fluye por una tubería de una planta embotelladora con una tasa de flujo de masa que llenaría 200 latas de 0.355 L por minuto. En el punto 2 del tubo, la presión manométrica es de 152 kPa y el área transversal es de 8.00 cm^2. En el punto 1, el cual se encuuentra 1.35 m arriba del punto 2, el área transversal es de 2.00 cm^2. Calcule:

   (a) la tasa de flujo de masa

   La tasa de flujo de masa para este caso se determina

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{200 \cdot 0.355 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3}{60 \text{ s}}$$
$$= 1.183 \text{ kg/s}$$

   La tasa de flujo de masa es de 1.183 kg/s

   (b) la tasa de flujo de volumen

   La tasa de flujo de volumen para este caso se determina

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{200 \cdot 0.355 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{60 \text{ s}}$$
$$= 1.183 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

La tasa de flujo de volumen es de 1.183×10^{-3} m^3/s

(c) la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2

Usando la definición de caudal se tiene

$$\begin{aligned}
Q &\equiv Av \\
\Rightarrow v &= \frac{Q}{A} \\
\Rightarrow v_2 &= \frac{Q}{A_2} = \frac{1.183 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}}{8.00 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} \\
&= 1.48\ \mathrm{m/s} \\
\Rightarrow v_1 &= \frac{Q}{A_1} = \frac{1.183 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}}{2.00 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} \\
&= 5.92\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

La rapidez del fluido en los puntos 1 y 2 es de 5.92 m/s y 1.48 m/s respectivamente

(d) la presión manométrica en el punto 1

Usando el principio de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 se determina la presión en el punto 1

$$\begin{aligned}
p_1 + g\rho y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + g\rho y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
\Rightarrow p_1 &= p_2 + g\rho\left(y_2 - y_1\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) \\
&= 122\ \mathrm{kPa}
\end{aligned}$$

La presión manométrica en el punto 1 es de 122 kPa

2. Para el tanque representado en la figura 2.26, la altura al punto 1 es 10,0 m y a los puntos 2 y 3 es de 2,0 m. El área transversal del tanque es muy grande en comparación al área transversal del tubo, el cual se encuentra abierto a la atmósfera. Las secciones transversales del tubo son $36,0$ cm^2 en las partes anchas y $9,0$ cm^2 en el estrechamiento. Si cada 5,0 segundos salen del tubo $4,00$ litros ($4,00 \times 10^{-3}$ m^3) de agua:

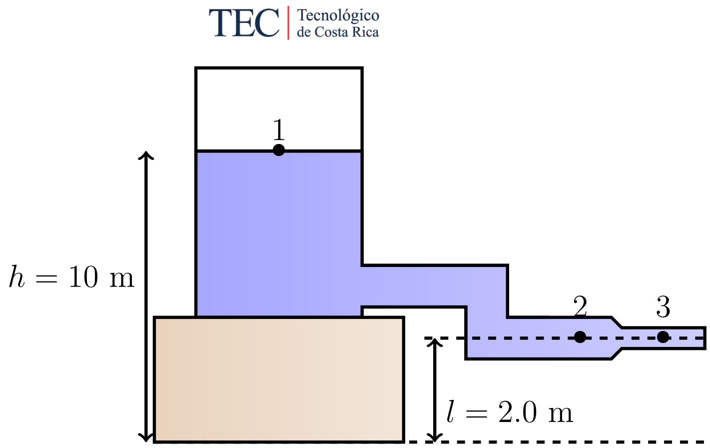


Figura 2.26

(a) ¿Cuál debe ser la presión manométrica (p_1) en el punto 1 para el tipo de caudal suministrado

Primero se calcula el caudal

$$Q = \frac{4.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{5.0\ \mathrm{s}} = 8.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

A partir de la definición de caudal se determina las velocidades v_1, v_2 y v_3

$$\begin{aligned} Q &\equiv Av \\ \Rightarrow v &= \frac{Q}{A} \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{Q}{A_2} = \frac{8.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{36 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 0.22\ \mathrm{m/s}, \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{Q}{A_3} = \frac{8.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{9.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 0.88\ \mathrm{m/s}, \end{aligned}$$

además $v_1 \sim 0$ en comparación con v_2 y v_3 pues el área en esa sección es muy grande en comparación con el área en los puntos 2 y 3. Lo anterior se puede verificar con la ecuación de continuidad. Usando el principio de Bernoulli entre los puntos 1 y 3 se determina p_1

$$p_1 + g\rho y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + g\rho y_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

donde $p_3 = 0$, $y_3 = 2.0$ m, $y_1 = 10,0$ m. Con lo anterior

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1 &= p_3 + g\rho\left(y_3 - y_1\right) + \frac{1}{2}\rho\left(v_3^2 - v_1^2\right) \\ &= -7.80 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

la presión manométrica (p_1) en el punto 1 necesaria para mantener el tipo de caudal suministrado es -7.80×10^5 Pa.

(b) Calcule las velocidades en la parte ancha y estrecha del tubo.

Las velocidades del fluido en las parte ancha y estrecha del tubo son de 0.22 m/s y 0.88 m/s

(c) Calcule la diferencia de presiones entre los puntos 2 y 3.

Usando el principio de Bernoulli entre los puntos 2 y 3 se determina $p_2 - p_3$

$$p_2 + g\rho y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3 + g\rho y_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

donde $y_2 = y_3 = 2.0$ m. Con lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2 - p_3 &= \frac{1}{2}\rho\left(v_3^2 - v_2^2\right) \\ &= 363 \text{ Pa} \end{aligned}$$

La diferencia de presiones entre los puntos 2 y 3 es de 363 Pa

3. En el medidor o tubo de Venturi mostrado en la figura 2.27, la lectura del manómetro diferencial de mercurio es 35 cm. El diámetro del tubo en la parte ancha es 30 cm, mientras que en la parte angosta es 15 cm. El fluido que se quiere analizar es agua. Determine:

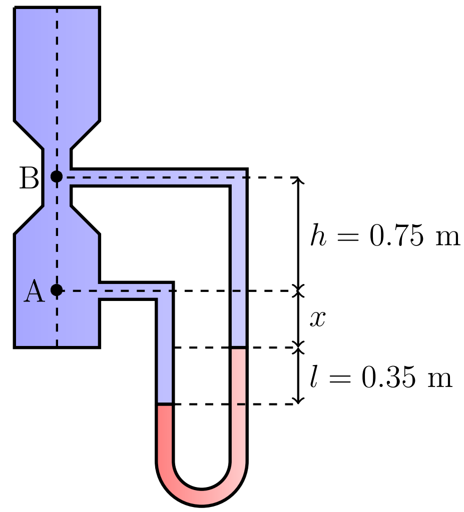


Figura 2.27: tubo de Venturi

(a) La diferencia de presión $P_A - P_B$.

Para este caso se aplica Pascal

- Entre los puntos A y C

$$p_C - p_A = -g\rho_{H_2O}(y_C - y_A)$$
$$\rightarrow p_C = p_A + g\rho_{H_2O}(x + l)\,. \tag{2.1}$$

- Entre los puntos B y D

$$p_D - p_B = -g\rho_{H_2O}(y_D - y_B)$$
$$\rightarrow p_D = p_B + g\rho_{H_2O}(x + h)\,. \tag{2.2}$$

- Entre los puntos C y D

$$p_C - p_D = -g\rho_{Hg}(y_C - y_D)$$
$$\rightarrow p_C - p_D = g\rho_{Hg}l. \tag{2.3}$$

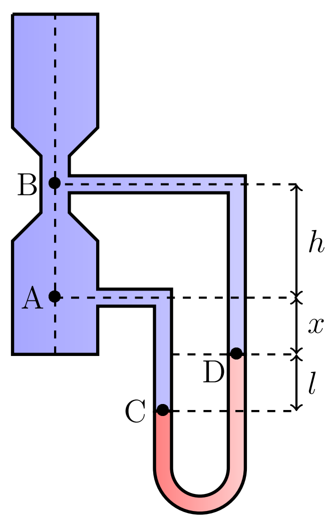


Figura 2.28

Sustituyendo las ecuaciones (2.1) y (2.2) en la ecuación (2.3) se obtiene

$$p_C - p_D = p_A + g\rho_{H_2O}(x+l) - (p_B + g\rho_{H_2O}(x+h)) = g\rho_{Hg} l$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = g\rho_{Hg} l + g\rho_{H_2O}(h-l)$$

$$= 5.06 \times 10^4 \text{ Pa}$$

La diferencia de presiones entre los puntos A y B es 5.06×10^4 Pa

(b) La velocidad v_B.

Aplicando la ecuación de continuidad entre los puntos A y B se tiene

$$\begin{aligned} A_A v_A &= A_B v_B \\ \Rightarrow v_A &= \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2 v_B \\ &= \frac{1}{4} v_B. \end{aligned}$$

Usando el principio de Bernoulli entre los puntos A y B se encuentra la velocidad v_B

$$\begin{aligned} p_A + g\rho y_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 &= p_B + g\rho y_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\ p_A - p_B + g\rho(y_A - y_B) &= \frac{1}{2}\rho\left(v_B^2 - v_A^2\right). \end{aligned}$$

Finalmente se resuelve para v_B

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\frac{32}{15\rho}(p_A - p_B - g\rho h)} \\ &= 9.61 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

La velocidad del agua en el punto B es 9.61 m/s

(c) El caudal

Usando la definición de caudal

$$
\begin{aligned}
Q &\equiv Av \\
&= \pi R^2 v \\
&= \pi \cdot (0.075 \text{ m})^2 \cdot 9.61 \text{ m/s} \\
&= 0.17 \text{ m}^3/\text{s}
\end{aligned}
$$

El caudal de agua es $0.17 \text{ m}^3/\text{s}$

4. Para separar dos líquidos inmiscibles de distinta densidad, los químicos utilizan un recipiente cilíndrico de $3,00$ cm de diámetro. El recipiente está abierto a la atmósfera por arriba y tiene una llave de salida de $0,25$ cm de diámetro en el fondo. Si en el recipiente hay 0.500 cm^3 de agua ($\rho_{agua} = 1,00 \text{ g/cm}^3$) y 0.700 cm^3 de aceite ($\rho_{aceite} = 0,90 \text{ g/cm}^3$), determine:

   (a) La presión manométrica en la interfaz aceite-agua y la presión manométrica en el fondo del recipiente antes que se abra la llave del fondo.

   A partir de la definición de volumen se calculan las alturas de agua y aceite

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{V_{aceite}}{\pi d^2/4} = 9.90 \times 10^{-4} \text{ m}, \\
h_2 &= \frac{V_{agua}}{\pi d^2/4} = 7.07 \times 10^{-4} \text{ m}.
\end{aligned}
$$

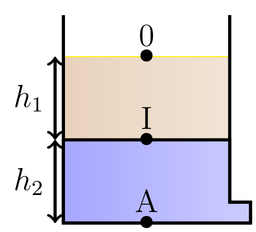


Figura 2.29

   Usando el principio de Pascal se encuentra la presión en la interfaz

$$
\begin{aligned}
p_I - p_0 &= -g\rho_{Aceite}\left(y_I - y_0\right) \\
\rightarrow p_I &= g\rho_{Aceite} h_1 \\
&= 8.73 \text{ Pa.}
\end{aligned}
$$

Usando el principio de Pascal se encuentra la presión en el fondo del recipiente

$$\begin{aligned} p_A - p_I &= -g\rho_{Agua}\left(y_A - y_I\right) \\ \rightarrow p_A &= p_I + g\rho_{Agua}h_2 \\ &= 15.66 \text{ Pa.} \end{aligned}$$

La presión en la interfaz es de 8.73 Pa y en el fondo del recipiente es 15.66 Pa.

(b) La rapidez inicial de salida del fluido cuando se abre la llave del fondo (indique qué fluido que sale primero).

Aplicando la ecuación de continuidad entre los puntos A e I se tiene

$$\begin{aligned} A_A v_A &= A_B v_B \\ \Rightarrow v_A &= \frac{A_I}{A_A} v_I \\ &= 144 v_I. \end{aligned}$$

Usando el principio de Bernoulli entre los puntos A e I se determina la rapidez inicial de salida del fluido

$$p_A + g\rho_{agua}y_A + \frac{1}{2}\rho_{agua}v_A^2 = p_I + g\rho_{agua}y_I + \frac{1}{2}\rho_{agua}v_I^2,$$

donde $p_A = 0$, $y_I = h_2$ y $y_A = 0$. Con lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} v_I &= \sqrt{\frac{2\left(p_I + g\rho_{agua}h_2\right)}{\rho_{agua}\left((144)^2 - 1\right)}} = 1.23 \times 10^{-3} \text{ m/s} \\ v_A &= 144 v_I = 0.18 \text{ m/s} \end{aligned}$$

El fluido que sale primero es el agua y sale con una velocidad de 0.18 m/s

(c) La rapidez con que comienza a salir el segundo fluido por el fondo del recipiente

Usando el principio de Bernoulli entre los puntos A e I se determina la rapidez inicial de salida del aceite

$$p_A + g\rho_{aceite} y_A + \frac{1}{2}\rho_{aceite} v_A^2 = p_0 + g\rho_{aceite} y_0 + \frac{1}{2}\rho_{aceite} v_0^2,$$

donde $p_A = p_0 = 0$, $y_I = h_1$ y $y_A = 0$.

Con lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2gh_2}{\left((144)^2 - 1\right)}} \\ &= 9.67 \times 10^{-4} \text{ m/s}, \\ v_A &= 144 v_0 = 0.14 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

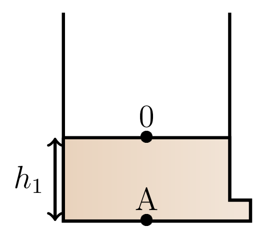
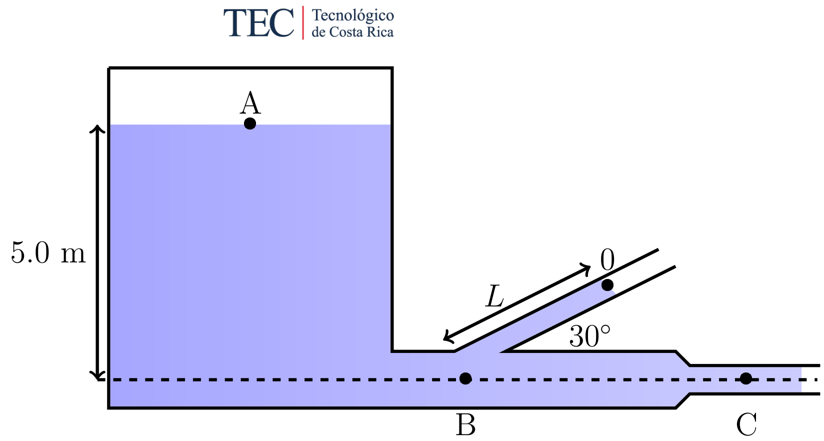


Figura 2.30

El aceite sale con una velocidad de 0.14 m/s

5. Considere un tanque cerrado, lleno con agua y de área de sección transversal muy grande. Se tiene una presión manométrica de $2P_0$ en el punto A, con $P_0 = 1,013 \times 10^5$ Pa. Un tubo horizontal, con un estrechamiento y abierto a la atmósfera en su extremo, sale del fondo del tanque. Las áreas de sección transversal del tubo horizontal en B y C son, respectivamente, $15,0$ cm^2 y $5,00$ cm^2. En el tubo horizontal se conecta un tubo inclinado muy delgado.



Calcule:

(a) El caudal que sale en C.

La velocidad del fluido en el punto A es semejante a cero en comparación con la velocidad del mismo en los puntos B y C esto debido a que el área en A es muy grande en comparación con las áreas en A y B. De acuerdo con la ecuación de continuidad

$$A_C v_C = A_B v_B$$
$$v_B = \left(\frac{A_C}{A_B}\right) v_C = \frac{1}{3} v_C.$$

Usando la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y C se tiene

$$p_A + g\rho_{agua} y_A + \frac{1}{2}\rho_{agua} v_A^2 = p_C + g\rho_{agua} y_C + \frac{1}{2}\rho_{agua} v_C^2,$$

donde $y_A = 5.0$ m, $y_C = 0$, $p_C = 0$. Se resuelve para v_C

$$v_C = \sqrt{\frac{2\left(p_A + g\rho_{agua} y_A\right)}{\rho_{agua}}}$$
$$= 22.4 \text{ m/s},$$

lo que nos lleva a

$$v_B = 7.47 \text{ m/s}.$$

El caudal del fluido se determina

$$Q = A_C v_C = 0.0112 \text{ m}^3/\text{s}.$$

El caudal que sale en C es de 0.0112 $\mathrm{m^3/s}$.

(b) La diferencia de presiones entre la parte ancha y la parte angosta del tubo horizontal.

Aplicando el principio de Bernoulli entre los puntos B y C se obtiene la presión manométrica en el punto B.

$$p_B + g\rho_{agua}y_B + \frac{1}{2}\rho_{agua}v_B^2 = p_C + g\rho_{agua}y_C + \frac{1}{2}\rho_{agua}v_C^2,$$

donde $y_B = y_C$, $p_C = 0$. Con lo anterior se obtiene p_B

$$p_B = \frac{1}{2}\rho_{agua}\left(v_C^2 - v_B^2\right) = 2.23 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La diferencia de presiones entre la parte ancha y la parte angosta del tubo horizontal es de 2.23×10^5 Pa.

(c) La longitud L de liquido que sube por el tubo inclinado

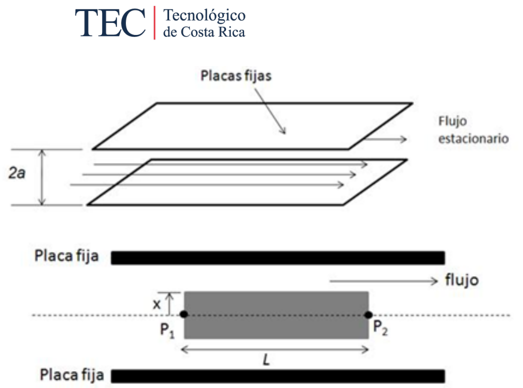
Aplicando el principio de Pascal en los puntos B y O

$$p_B - p_0 = -g\rho_{Agua}\left(y_B - y_0\right)$$
$$\rightarrow p_B = g\rho_{Agua}L\sin 30^\circ$$
$$L = \frac{p_B}{g\rho_{Agua}\sin 30^\circ} = 45.5 \text{ m}$$

La longitud L de liquido que sube por el tubo inclinado es de 45.5 m

2.3 Viscosidad

1. Considere un fluido sometido a un flujo laminar estacionario a través de dos placas fijas, de gran tamaño, separadas una distancia $2a$ (ver figura). Tome un bloque de fluido, sujeto a las presiones P_1 y P_2 sobre las caras perpendiculares a la dirección del flujo, con dimensiones $2x$, L y w. A partir de la información anterior calcule:



Corte longitudinal del sistema de placas fijas y bloque de fluido en el estado de flujo estacionario.

Figura 2.31

(a) El gradiente de velocidades $\frac{dv}{dx}$,

(b) La velocidad del fluido en función de x.

2. Una esfera de metal cuyo diámetro $d = 5.0 \times 10^{-3}$ m, desciende con movimiento uniforme en un fluido viscoso de viscosidad $\eta = 1.39$ Pa $\cdot$ s y densidad $\rho_f = 1.32^3$ Kg$\cdot$m^3. El flujo es laminar y el número de Reynolds es $R = 0.500$. Con base en esta información determine la densidad de la esfera de metal ρ_{esfera}.

3. Por una tubo de 10 m de largo y 0.10 m de radio se transporta un fluido con densidad $\rho = 700$ kg/m^3 y viscosidad η. La diferencia de presiones entre los extremos del tubo, necesaria para mantener el flujo es de 2500 Pa. Si la velocidad máxima del fluido es de 20.0 cm/s Determine:

   a) La viscosidad del fluido

   b) El caudal del fluido

4. A través de una sección transversal de segmento circular fluye (en un estado estacionario) un fluido de densidad ρ y viscosidad η tal y como se muestra en la figura 2.32. El segmento circular es de radio R y la velocidad del flujo varía de acuerdo a la relación $V = \beta x$, donde β es una constante. Determine el caudal a través de la tubería. Considere $x^2 + y^2 = r^2$.

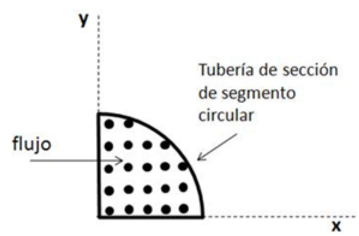


Figura 2.32

2.4 Problemas propuestos

1. Considere una pecera completamente llena por dos líquidos, con densidades 1200 kg/m^3 y 900 kg/m^3, respectivamente. Sobre una de las paredes verticales hay una ventana con forma de trapecio isósceles, como se muestra en la figura 2.33. Para esta ventana, determine la fuerza hidrostática total ejercida por los líquidos.R/ 903 N

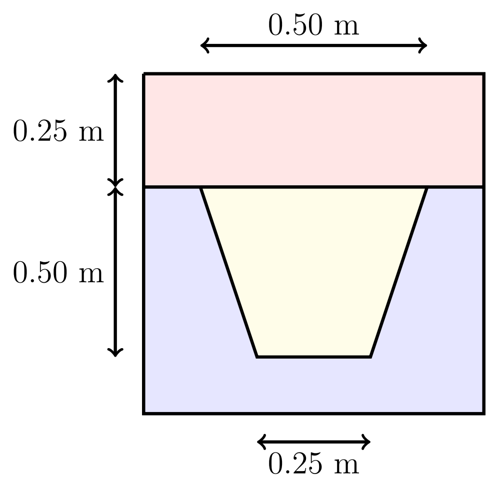


Figura 2.33

2. Calcular la magnitud de la fuerza hidrostática que ejerce el agua sobre la pared inclinada AB del recipiente mostrado en la figura 2.34. Suponga que el ancho del recipiente es 5.0 m (perpendicular a la hoja) y la densidad del aceite es: ρ_{aceite} = 600.0 kg/m^3. R/ 8.94×10^5 N (usando presiones manométricas)

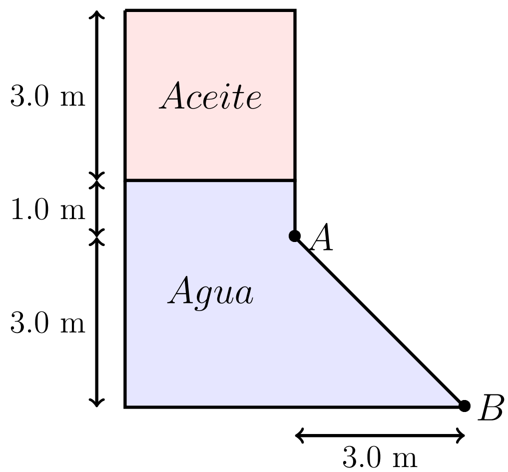


Figura 2.34

3. La ventana de un submarino tiene una forma parabólica como se muestra en la figura 2.35. Si la parte superior de la ventana se encuentra a 50 metros de profundidad en agua salada de densidad $\rho = 1025\ \mathrm{kg/m^3}$. Determine:

   (a) La presión absoluta sobre la parte inferior de la ventana. R/ 6.44×10^5 Pa

   (b) La fuerza hidrostática sobre la ventana. R/ 5.53×10^6 Pa (usando presiones manométricas)

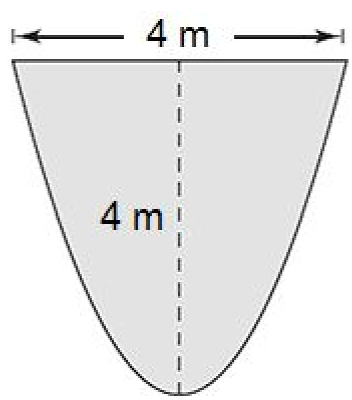


Figura 2.35

4. Un corcho cilíndrico de 15.0 g de masa y 10.0 cm^2 de sección transversal, flota en una vasija con agua, según se ve en la figura 2.36. Un cilindro de aluminio de 25.0 g de masa y 2.0 cm^2 de sección transversal, cuelga 4.0 cm por debajo del corcho deslizándose por un orificio perfectamente ajustado y sin rozamiento, practicado en el fondo de la vasija.

   (a) ¿Qué distancia hay del extremo inferior del corcho a la superficie del agua? R/ 0.035 m

   (b) ¿Qué tensión hay en la cuerda que une ambos cilindros? R/ 0.196 N

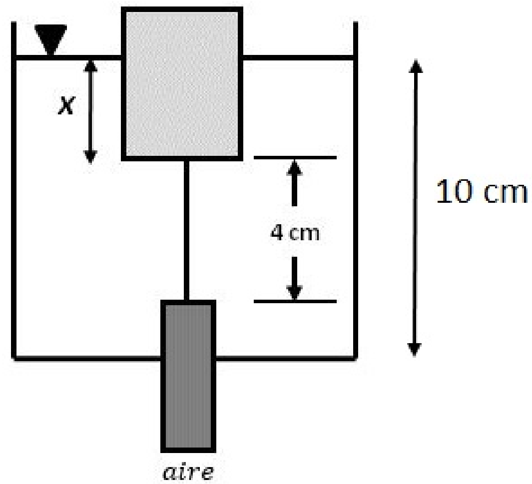


Figura 2.36

5. La compuerta de la presa del lago Arenal tiene forma rectangular, como se ilustra en la figura 2.37. La superficie del lago detrás de la presa llega al borde superior de ésta.

   (a) Calcule la fuerza neta ejercida por el agua sobre la compuerta. R/ 7.84×10^4 N (usando presiones manométricas)

   (b) Determine la magnitud del torque que ejerce el agua alrededor de un eje que corre a lo largo de la base de la compuerta. R/ 5.23×10^4 N·m (usando presiones manométricas)

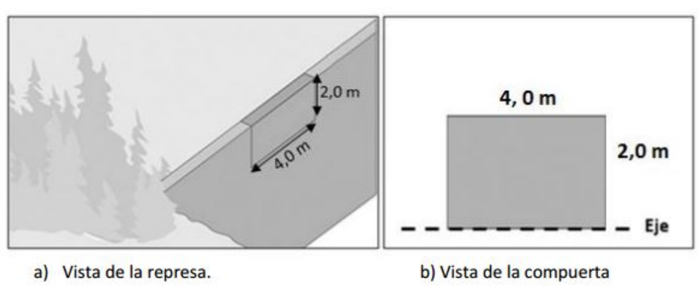


Figura 2.37

6. Considere el sistema de la figura 2.38. El tubo horizontal superior tiene un diámetro de 3.00 cm en la parte ancha y 1.00 cm en la parte angosta. La parte angosta está abierta a la atmósfera y por allí salen 1.33×10^{-3} m^3/s. Por el tubo inferior corre otro fluido y el tubo está a una presión manométrica de 2.62×10^5 Pa. Si $L = 10.0$ m, $\rho_1 = 800$ kg/m^3 y $\rho_2 = 2000$ kg/m^3 determine h. R/ 6.01 m

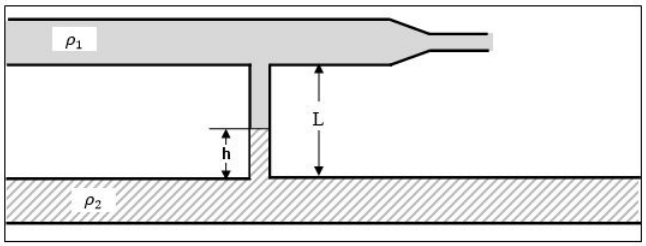


Figura 2.38

7. Dos tanques abiertos muy grandes A y F contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD, con una constricción en C y abierto al aire en D, sale del fondo del tanque A. Un tubo vertical E emboca en la constricción en C y baja al líquido del tanque F. Suponga flujo de línea de corriente y cero viscosidad. Si el área transversal en C es la mitad del área en D, y si D está a una distancia h_1 bajo el nivel del líquido en A, ¿a qué altura h_2 subirá el líquido en el tubo E? Exprese su respuesta en términos de h_1. R/ $h_2 = 3h_1$

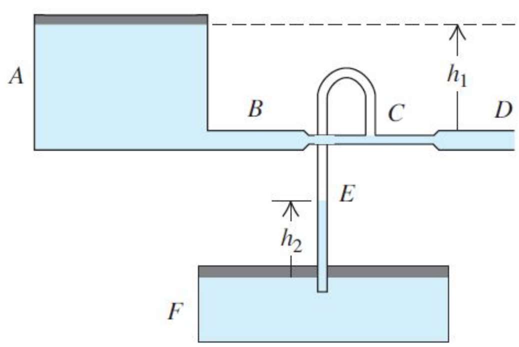


Figura 2.39

8. Considere un tubo horizontal como el mostrado en la figura 2.40, por el que fluye un líquido ideal con densidad 930 kg/m^3, el tubo tiene una

constricción de modo tal que el diámetro se reduce de 10.0 cm a 4.00 cm. La presión absoluta y la velocidad del fluido en la parte ancha del tubo horizontal son 2.026×10^5 Pa y 2.00 m/s, respectivamente. De la constricción sale un tubo con una inclinación de 30°. Determine:

(a) La longitud L de liquido que sube por el tubo inclinado. R/ 6.64 m (considere el diametro del tubo pequeño)

(b) La cantidad de kilogramos por segundo que fluyen en el tubo. R/ 14.6 kg/s

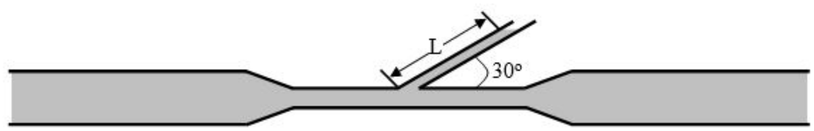


Figura 2.40

9. Una esfera de acero de 1.00 mm de radio cae en un depósito de glicerina.

   (a) Calcule la velocidad de la esfera en el instante en que su aceleración es la mitad de la de un cuerpo que cae en caída libre.

   (b) Calcule la velocidad terminal (velocidad límite) de la esfera.

TEC | Tecnológico de Costa Rica

3

Calor y temperatura

3.1 Expansión térmica

1. Un tanque de acero se llena totalmente con 2.80 m^3 de etanol cuando tanto el tanque como el etanol están a 32.0°C. Una vez que el tanque y el contenido se hayan enfriado a 18.0°C, ¿qué volumen adicional de etanol podrá meterse en el tanque?

   Se calcula el cambio de volumen del etanol

$$\begin{aligned}\Delta V &= \beta_{etanol} V_{0etanol} \Delta T \\ &= 75 \times 10^{-5} \frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot 2.80 \ \mathrm{m}^3 \, (32.0 - 18.0)^\circ \, \mathrm{C} \\ &= -0.0294 \ \mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Se calcula el cambio de volumen del tanque

$$\Delta V = \beta_{acero} V_{0acero} \Delta T$$
$$= 3.6 \times 10^{-5} \frac{1}{°\text{C}} \cdot 2.80 \text{ m}^3 (32.0 - 18.0)^{\circ} \text{C}$$
$$= -0.00141 \text{ m}^3.$$

Finalmente se calcula el volumen adicional que se debe agregar de etanol

$$V_{adicional} = V_{facero} - V_{fetanol}$$
$$= (V_{0acero} + \Delta V_{acero}) - (V_{0etanol} + \Delta V_{etanol})$$
$$\Delta V_{acero} - \Delta V_{etanol} = 0.02799 \text{ m}^3.$$

El volumen adicional de etanol que podrá meterse en el tanque es de 0.02799 m^3.

2. El volumen de un cilindro, de radio R y longitud L, está dado por la relación siguiente:
$$V = \pi R^2 L.$$

A la temperatura $T_i = 25,00°\text{C}$, $L = 20,000$ cm y $R = 2,000$ cm. Si el cilindro se somete a un cambio de temperatura de 75,00°C, su radio aumenta en un 0,20 %. Considerando que el cilindro está hecho de un material isotrópico, calcule:

(a) El coeficiente de dilatación lineal

Usando la expresión de expansión térmica lineal se determina el coeficiente de expansión lineal

$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta T$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta T} = \frac{0.0020 R_0}{R_0 \Delta T} = \frac{0.0020}{\Delta T} = \frac{0.0020}{75°\text{C}}$$

$$= 2.67 \times 10^{-5} °\text{C}^{-1}.$$

El coeficiente de dilatación térmica del cilindro es $2.67 \times 10^{-5}°\text{C}^{-1}$.

(b) El porcentaje de dilatación a lo largo de la longitud del cilindro.
Usando la expresión de expansión térmica lineal se determina el cambio de longitud del largo del cilindro

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

$$= 2.67 \times 10^{-5}°\text{C}^{-1} \cdot 0.20\ \text{m} \cdot 75°\text{C}$$

$$= 0.00040\ \text{m}.$$

El porcentaje de dilatación a lo largo de la longitud se determina

$$\% = \left| \frac{\Delta L}{L_0} \right| \cdot 100 = \left| \frac{0.00040\ \text{m}}{0.20\ \text{m}} \right| \cdot 100 = 0.20\%.$$

El porcentaje de dilatación a lo largo de la longitud es 0.20%, lo cual se esperaba pues el cilindro esta hecho de un material isotrópico.

(c) El porcentaje de dilatación del volumen del cilindro.
Primero se calcula el volumen inicial del cilindro

$$V_0 = \pi R_0^2 L_0 = 2.5 \times 10^{-4}\ \text{m}^3.$$

A continuación se calcula el cambio de volumen del cilindro

$$\begin{aligned}\Delta V &= 3\alpha V_0 \Delta T\\ &= 3 \cdot 2.67 \times 10^{-5 \circ} C^{-1} \cdot 2.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 \cdot 75^\circ\mathrm{C}\\ &= 0.015 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3.\end{aligned}$$

El porcentaje de dilatación del volumen del cilindro se determina

$$\% = \left|\frac{\Delta V}{V_0}\right| \cdot 100 = \left|\frac{0.015 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3}{2.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3}\right| \cdot 100 = 0.60\%.$$

El porcentaje de dilatación del volumen del cilindro 0.60%.

(d) El volumen del cilindro a $T = 100,00^\circ$C.

El volumen del cilindro a 100°C se determina

$$V = V_0 + \Delta V = 2.515 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3.$$

El volumen del cilindro a 100°C es 2.515×10^{-4} m^3.

3. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón ($\alpha_{La} = 1,9 \times 10^{-5 \circ}\mathrm{C}^{-1}$) con una cinta métrica de acero ($\alpha_{ac} = 1,1 \times 10^{-5 \circ}\mathrm{C}^{-1}$) cuando ambas están a 20,00 °C (temperatura de calibración en la cinta). El determina que la longitud de la barra a esa temperatura es 80,00 cm.

   (a) Si la barra se lleva a -10,00°C, calcular la longitud de ésta medida con la cinta a 20,00°C.

   Para este caso se calcula el cambio de longitud debido a la expansión térmica

$$\begin{aligned}\Delta L_b &= \alpha_{La} L_{0b} \Delta T_b\\ &= 1.9 \times 10^{-5 \circ}\mathrm{C}^{-1} \cdot 80\ \mathrm{cm} \cdot (-10 - 20)\,^\circ\mathrm{C}\\ &= -0.0456\ \mathrm{m}.\end{aligned}$$

La longitud de la barra a -10°C se determina

$$L_{fb} = L_{0b} + \Delta L_b = 79.9544 \text{ m}$$

La Longitud de la barra a -10,00°C medida con la cinta a 20,00°C es 79.9544 m.

(b) Calcular la separación de las marcas de los centímetros en la cinta si ésta se llevase también a -10,00°C.

En este caso lo que se debe calcular es cuanto se encojen las separaciones entre las lineas de los centímetros. Usando la expresión para determinar los cambio de longitud debido a expansión térmica se tiene

$$\begin{aligned}\Delta L_{cm} &= \alpha_{ac} L_{0cm} \Delta T_{cm} \\ &= 1.2 \times 10^{-5} {}^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot 1.0 \text{ cm} \cdot (-10.00 - 20.00)\, {}^{\circ}\text{C} \\ &= -0.00036 \text{ cm.}\end{aligned}$$

La distancia de separación entre las lineas se determina

$$L_{fcm} = 1.0 \text{ cm} - 0.00036 \text{ cm} = 0.99964 \text{ cm.}$$

Lo anterior lo que significa es que un centímetro a -10°C equivale 0.99964 cm a 20°C.

La separación de las marcas de los centímetros en la cinta si ésta se llevase a -10,00°C es de 0.99964 cm.

(c) Calcular la longitud de la barra a -10,00°C, medida con la cinta a la temperatura de -10,00°C.

La longitud de la barra a -10,00°C, medida con la cinta a la temperatura de -10,00°C se determina

$$L_b = 79.9544 \text{ m} \times \frac{1.0 \text{ cm}}{0.99964 \text{ cm}} = 79.9832 \text{ cm.}$$

La longitud de la barra a -10,00°C, medida con la cinta a la temperatura de -10,00°C es 79.9832 cm.

4. Un material X, de longitud L, presenta un coeficiente de dilatación lineal que varía con la temperatura de la siguiente manera

$$\alpha_1 = \beta + \gamma T^3 \qquad \text{para el intervalo}[T, 2T]$$

$$\alpha_2 = 3\beta + 2\gamma T^3 \qquad \text{para el intervalo}[2T, 3T]$$

Determine:

(a) La longitud del material X si este sufre un cambio de temperatura de T a $2T$

Primero se calcula el cambio de longitud del material

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= \int_T^{2T} \alpha_1 L_0 dT \\ &= \int_T^{2T} \left(\beta + \gamma T^3\right) L_0 dT \\ &= \left(\beta T + \frac{15}{4}\gamma T^4\right) L_0.\end{aligned}$$

La longitud de la barra a $2T$ es

$$L_1 = L_0 + \Delta L_1 = \left(1 + \beta T + \frac{15}{4}\gamma T^4\right) L_0.$$

(b) La longitud del material X si este sufre un cambio de temperatura de $2T$ a $3T$

Primero se calcula el cambio de longitud del material en el intervalo de temperaturas de $2T$ a $3T$

$$\begin{aligned}\Delta L_2 &= \int_{2T}^{3T} \alpha_2 L_1 dT \\ &= \int_{T}^{2T} \left(2\beta + 2\gamma T^3\right) L_1 dT \\ &= \left(2\beta T + \frac{65}{2}\gamma T^4\right) L_1\end{aligned}$$

La longitud de la barra a $3T$ se determina

$$\begin{aligned}L_2 &= L_1 + \Delta L_2 \\ &= \left(1 + 2\beta T + \frac{65}{2}\gamma T^4\right) L_1 \\ &= \left(1 + 2\beta T + \frac{65}{2}\gamma T^4\right)\left(1 + \beta T + \frac{15}{4}\gamma T^4\right) L_0.\end{aligned}$$

La longitud de la barra a $3T$ es

$$L_2 = \left(1 + 3\beta T + 2\beta^2 T^2 + 20\gamma T^4 + 20\gamma\beta T^6 + \frac{975}{8}\gamma^2 T^8\right) L_0.$$

(c) El coeficiente de dilatación promedio para un cambio de temperatura de T a $3T$

El coeficiente de expansión térmica promedio se determina usando

$$\begin{aligned}\Delta L &= \bar{\alpha} L_0 \Delta T \\ \rightarrow \bar{\alpha} &= \frac{\Delta L}{L_0 \Delta T},\end{aligned}$$

donde

$$\Delta L = L_2 - L_0 = \left(3\beta T + 2\beta^2 T^2 + 20\gamma T^4 + 20\gamma\beta T^6 + \frac{975}{8}\gamma^2 T^8\right) L_0.$$

El coeficiente de expansión promedio es

$$\rightarrow \bar{\alpha} = \left(\frac{3}{2}\beta + \beta^2 T + 10\gamma T^3 + 10\gamma\beta T^5 + \frac{975}{16}\gamma^2 T^7\right).$$

5. Una barra está fija en sus extremos a dos paredes inamovibles, como resultado de un aumento de temperatura de 30°C, la barra que originalmente tenia una grieta en el centro termina pandeándose hacia arriba, ver figura. Si la longitud fija y el coeficiente de dilatación lineal es de $30 \times 10^{-6}(°\mathrm{C})^{-1}$. Hallar x, la distancia a la que se eleva el centro

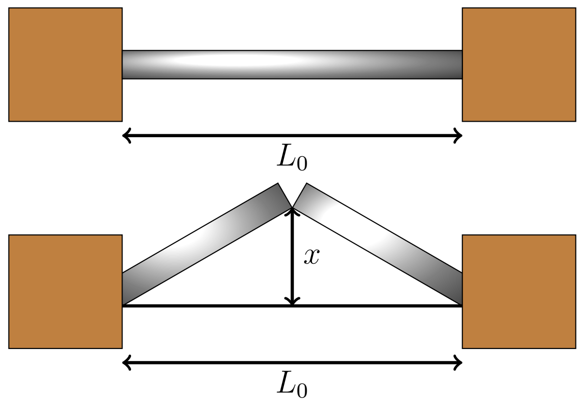


Figura 3.1

Usando pitagoras se tiene

$$\left(\frac{L_0}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{L_0}{2} + \Delta L\right)^2,$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{L_0}{2}\alpha\Delta T \\ &= 30 \times 10^{-6}°\mathrm{C}^{-1} \cdot 30°\mathrm{C} \cdot \frac{L_0}{2} \\ &= 4.5 \times 10^{-4} L_0,\end{aligned}$$

lo que lleva a

$$\begin{aligned}x &= \frac{L_0}{2}\sqrt{(1 + 9.0 \times 10^{-4})^2 - 1} \\ &= 0.021 L_0.\end{aligned}$$

La distancia x a la que se eleva el centro es $0.021 L_0$.

3.2 Calorimetría

1. Un tazón de cobre de 146,0 g contiene 223,0 g de agua. El tazón y el agua están a una temperatura de 21,0°C. Se deja caer en el agua un cilindro de cobre muy caliente que tiene una masa de 314,0 g. Esto la hace hervir y 4,7 g de agua se convierten en vapor.

   (a) ¿Cuál es la temperatura de equilibrio?

   La temperatura de equilibrio es 100°C esto debido a que esa es la única temperatura (en condiciones ideales) a la cual pueden coexistir agua y vapor

   (b) ¿Cuánto calor se transfiere al agua?
   El calor ganado por el agua se determina

$$\begin{aligned} Q_A &= m_A c_A \Delta T_A + m_V L_V \\ &= 0.223 \text{ kg} \cdot 4190 \text{ J/kg°C} \cdot 79\text{°C} + 0.0047 \text{ kg} \cdot 2256 \times 10^3 \text{ J/kg} \\ &= 84.4 \times 10^3 \text{J}. \end{aligned}$$

   El calor que se transfiere al agua es de 84.4×10^3J.

   (c) ¿Cuánto calor se transfiere al tazón?
   El calor ganado por el tazón se determina

$$\begin{aligned} Q_T &= m_T c_T \Delta T_T \\ &= 0.146 \text{ kg} \cdot 390 \text{ J/kg°C} \cdot 79\text{°C} \\ &= 4.50 \times 10^3 \text{J}. \end{aligned}$$

   El calor que se transfiere al tazón es de 4.50×10^3J.

   (d) ¿Cuál es la temperatura original del cilindro?
   Usando la ecuación de conservación de calor para un sistema aislado

$$\begin{aligned} \sum Q &= Q_A + Q_T + Q_C = 0 \\ \rightarrow Q_C &= -\left(Q_A + Q_T\right) \\ &= -88.9 \text{ J}. \end{aligned}$$

El cilindro pierde calor debido al cambio de temperaturas, por lo tanto la temperatura inicial del cilindro se determina

$$\begin{aligned} Q_C &= m_C c_C \left(T_e - T_C\right) \\ \rightarrow T_C &= T_e - \frac{Q_C}{m_C c_C} \\ &= 100°C + \frac{88.9 \text{ J}}{0.314 \text{ kg} \cdot 390 \text{ J/kg°C}} \\ &= 846° \end{aligned}$$

La temperatura original del cilindro era de 846°.

2. En un recipiente de aluminio de 50,0 g de masa, aislado térmicamente, se encuentra contenida en equilibrio térmico, una mezcla de 200,0 g de agua y 300,0 g de vapor de agua. Si se introduce en el recipiente un cubo de cobre de 50,0 g que está inicialmente a -79,0 °C, determine:

   (a) La temperatura final de equilibrio del sistema.

   Para este caso se tiene que la temperatura de equilibrio podría estar entre las siguientes posibilidades:

   - $T_e = 100$°C. Para este caso solamente el vapor y el cubo de cobre perderían o ganarían calor. Solo una parte del vapor se condensa.
   - 0°C $< T_e <$ 100°C. Para este caso todo el vapor se condensa, el agua y el aluminio bajan su temperatura y el cubo de cobre aumentaría su temperatura
   - $T_e = 0$°C. Para este caso todo el vapor se condensa, el agua y el aluminio bajan su temperatura y el cubo de cobre aumentaría su temperatura, además se ocuparía que una parte de agua se solidifique
   - -79°C $< T_e <$ 0°C. Para este caso todo el vapor se condensa, el agua y el aluminio bajan su temperatura y el cubo de cobre aumentaría su temperatura, además se solidificaría toda el agua (la masa de vapor y la masa de agua).

Para saber cual es la temperatura de equilibrio se debe analizar una a una las distintas posibilidades hasta encontrar cual no se contradice. Ahora bien debido a las condiciones físicas de las sustancias de este problema (masa, calor específico y temperaturas) se empieza por el primer caso, en otras palabras se analiza el caso en que la temperatura de equilibrio es 100°C. Para este caso se tiene

- Calor ganado por el cubo de cobre

$$\begin{aligned} Q_{Cu} &= m_{Cu} c_{Cu} \left(T_e - T_{Cu}\right) \\ &= 0.050 \text{ kg} \cdot 390 \text{ J/kg°C} \left(100°C + 79°C\right) \\ &= 3490 \text{ J.} \end{aligned}$$

- Calor perdido por el vapor

$$Q_v = -x_V L_V$$

  donde x_V es la cantidad de masa de vapor que se condensa, la cual obviamente no puede ser mayor a la masa original de vapor.

Usando la ecuación de conservación de calor para un sistema aislado se tiene

$$\begin{aligned} &\sum Q = Q_V + Q_{Cu} = 0 \\ &\rightarrow Q_V = -Q_{Cu} \\ &\rightarrow x_V = \frac{Q_{Cu}}{L_v} = \frac{3490 \text{ J}}{2256 \times 10^3 \text{ J/kg}} \\ &\qquad = 0.00155 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Dado que la cantidad de masa de vapor que se condensa es menor que la masa original de vapor se concluye que la temperatura de equilibrio del sistema es 100°C

(b) La composición final de la mezcla.

De acuerdo con el resultado anterior la composición final de la mezcla es

- Aluminio: 50,0 g,
- Cobre: 50,0 g,
- Agua: 201,55 g,
- Vapor: 298,45 g.

3. Calcular la temperatura final de equilibrio de un sistema que se obtiene cuando se mezclan 200 g de hielo a –20,0°C con 10,0 g de vapor de agua a 105°C. Determinar la cantidad final de vapor, agua y hielo que quedan cuando se alcanza el equilibrio térmico.

   Para este caso se tiene que la temperatura de equilibrio podría estar entre las siguientes posibilidades:

   - $100°C < T_e < 105°C$. Para este caso todo el hielo se derrite y el vapor baja su temperatura
   - $T_e = 100°C$. Para este caso el vapor solo una parte del vapor se condensa y todo el hielo se derrite.
   - $0°C < T_e < 100°C$. Para este caso todo el vapor se condensa, y todo el hielo se derrite
   - $T_e = 0°C$. Para este caso todo el vapor se condensa, y una parte del hielo se derrite (o podría pasar que una parte del vapor condensado se vuelva hielo y nada de hielo se derrite).
   - $-20°C < T_e < 0°C$. Para este caso todo el vapor se condensa, el hielo aumentaría su temperatura, además se solidificaría toda el agua (la masa de vapor).

   Para saber cual es la temperatura de equilibrio se debe analizar una a una las distintas posibilidades hasta encontrar cual no se contradice. Ahora bien debido a las condiciones físicas de las sustancias de este problema (masa, calor específico y temperaturas) se empieza por el cuarto caso, en otras palabras se analiza el caso en que la temperatura de equilibrio es 0°C. Para este caso se comparan los calores ganados o perdidos por las sustancias solo por llegar a 0°C

- Calor ganado por el hielo

$$
\begin{aligned}
Q_h &= m_h c_h \left(T_0 - T_{hielo}\right) \\
&= 0.200 \text{ kg} \cdot 2090 \text{ J/kg°C} \left(0°C + 20°C\right) \\
&= 8360 \text{ J}.
\end{aligned}
$$

- Calor perdido por el vapor

$$
\begin{aligned}
Q_v &= +m_v c_v \left(100°\text{C} - T_v\right) - m_v L_v + m_v c_a \left(T_0 - 100°\text{C}\right) \\
&= -0.010 \text{ kg} \cdot \left(2010 \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 5°\text{C} + 2256 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 100°\text{C}\right) \\
&= -26890.5 \text{ J}.
\end{aligned}
$$

Ojo en ninguno de los calores calculados se considero la energía debido al cambio de estado a 0°C pues primero se debe pensar quien cambiará. Para saber lo anterior se comparan los calores calculados anteriormente y se contesta ¿Cuál tiene una magnitud mayor?. Como $|Q_{vapor}| > |Q_{hielo}|$ entonces el hielo o una parte del hielo se debe derretir, esto debido a que en un sistema aislado se debe satisfacer $\sum Q = 0$. Ahora bien la energía que gana el hielo debido al cambio de estado es

$$Q_{h2} = x_h L_f.$$

Usando la ecuación de conservación de calor para un sistema aislado se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum Q &= Q_v + Q_h + Q_{h2} = 0 \\
\rightarrow Q_{h2} &= -\left(Q_v + Q_h\right) \\
\rightarrow x_h &= \frac{-\left(Q_v + Q_h\right)}{L_f} \\
&= -\frac{-26890.5 \text{ J} + 8360 \text{ J}}{333 \times 10^3 \text{ J/kg}} \\
&= 0.056 \text{ kg}.
\end{aligned}
$$

Dado que la cantidad de masa de hielo que se derrite es menor que la masa original de hielo se concluye que la temperatura de equilibrio del sistema es 0°C. De acuerdo con el resultado anterior la composición final de la mezcla es

- Agua: 66 g,
- Hielo: 134 g.

4. En un calorímetro se mezclan 30.00 g de hielo a –40.00°C con 30.00 g de agua a 25.00°C y 2.00 g de vapor a 200.00˚C.

   (a) Calcule la temperatura final de equilibrio de la mezcla.

   Para este caso se tiene que la temperatura de equilibrio podría estar entre las siguientes posibilidades:

   - 100°C $< T_e <$ 200°C. Para este caso todo el hielo se derrite y el vapor baja su temperatura. Además toda el agua se evapora (masa de agua y masa de hielo).
   - $T_e =$ 100°C. Para este caso el vapor solo una parte del vapor se condensa y todo el hielo se derrite.
   - 0°C $< T_e <$ 100°C. Para este caso todo el vapor se condensa, y todo el hielo se derrite
   - $T_e =$ 0°C. Para este caso todo el vapor se condensa, y una parte del hielo se derrite (o podría pasar que una parte del vapor condensado se vuelva hielo y nada de hielo se derrite).
   - -40°C $< T_e <$ 0°C. Para este caso todo el vapor se condensa, el hielo aumentaría su temperatura, además se solidificaría toda el agua (la masa de vapor y masa de agua).

   Para saber cual es la temperatura de equilibrio se debe analizar una a una las distintas posibilidades hasta encontrar cual no se contradice. Ahora bien debido a las condiciones físicas de las sustancias de este problema (masa, calor específico y temperaturas) se empieza por el cuarto caso, en otras palabras se analiza el caso en que la temperatura de equilibrio es 0°C. Para este caso se comparan los calores ganados o perdidos por las sustancias solo por llegar a 0°C

- Calor ganado por el hielo

$$\begin{aligned} Q_h &= m_h c_h \left(T_0 - T_h\right) \\ &= 0.030\ \text{kg} \cdot 2090\ \text{J/kg°C} \left(0°C + 40°C\right) \\ &= 2580\ \text{J.} \end{aligned}$$

- Calor perdido por el vapor

$$\begin{aligned} Q_v &= +m_v c_v \left(100°\text{C} - T_v\right) - m_v L_v + m_v c_a \left(T_0 - 100°\text{C}\right) \\ &= -0.0020\ \text{kg} \cdot \left(2010 \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 100°\text{C} + 2256 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg°C}} \cdot 100°\text{C}\right) \\ &= -5752\ \text{J.} \end{aligned}$$

- Calor ganado por el agua

$$\begin{aligned} Q_{agua} &= m_a c_a \left(T_0 - T_a\right) \\ &= 0.030\ \text{kg} \cdot 4190\ \text{J/kg°C} \left(0°C - 25°C\right) \\ &= -3143\ \text{J.} \end{aligned}$$

Ojo en ninguno de los calores calculados se considero la energía debido al cambio de estado a 0°C pues primero se debe pensar quien cambiará. Para saber lo anterior se comparan los calores calculados anteriormente y se contesta ¿Cuál tiene una magnitud mayor?. Como $|Q_{vapor} + Q_{agua}| > |Q_{hielo}|$ entonces el hielo o una parte del hielo se debe derretir, esto debido a que en un sistema aislado se debe satisfacer $\sum Q = 0$. Ahora bien la energía que gana el hielo debido al cambio de estado es

$$Q_{hielo2} = x_{hielo} L_f.$$

Usando la ecuación de conservación de calor para un sistema aislado se tiene

$$\begin{aligned}
\sum Q &= Q_{vapor} + Q_{agua} + Q_{hielo} + Q_{hielo2} = 0 \\
\rightarrow Q_{hielo2} &= -\left(Q_{vapor} + Q_{agua} + Q_{hielo}\right) \\
\rightarrow x_{hielo} &= \frac{-\left(Q_{vapor} + Q_{agua} + Q_{hielo}\right)}{L_f} \\
&= -\frac{-5752\ \mathrm{J} - 3143\ \mathrm{J} + 2580\ \mathrm{J}}{333 \times 10^3\ \mathrm{J/kg}} \\
&= 0.019\ \mathrm{kg}.
\end{aligned}$$

Dado que la cantidad de masa de hielo que se derrite es menor que la masa original de hielo se concluye que la temperatura de equilibrio del sistema es 0°C.

(b) ¿Cuál es la composición final de la mezcla?

De acuerdo con el resultado anterior la composición final de la mezcla es

- Agua: 51 g,
- Vapor: 0 g,
- Hielo: 11 g.

3.3 Transferencia de calor

1. Una varilla, larga y aislada está en contacto térmico perfecto para evitar pérdidas de calor por sus costados, en un extremo con agua hirviendo (a presión atmosférica) y con una mezcla agua-hielo en el otro. La varilla consiste en un tramo de 1.00 m de cobre (con un extremo en contacto con vapor de agua) y el otro, unido a tope con un tramo L_2 de acero (con un extremo en contacto con la mezcla hielo-agua). Ambos tramos tienen un área transversal de 4.00 cm^2. La temperatura en la unión cobre-acero es de 65°Cuna vez que se alcanza el estado de equilibrio.

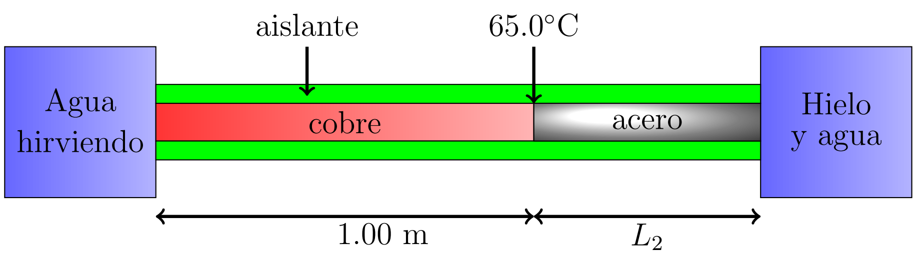


Figura 3.2

(a) ¿Cuánto calor por segundo fluye del baño de vapor a la mezcla hielo-agua?

El flujo de calor se determina

$$\begin{aligned} H_{Cu} &= \frac{k_{Cu} A \left(T_H - T_C\right)}{L} \\ &= \frac{385 \text{ W/K·m} \cdot 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 35 \text{ K}}{1.00 \text{ m}} \\ &= 5.39 \text{ W} \end{aligned}$$

El calor por segundo que fluye del baño de vapor a la mezcla hielo-agua es 5.39 W.

(b) ¿Qué longitud L_2 tiene el tramo de acero?

Para este caso se tiene que el flujo de calor es estacionario y además las barras se encuentran en serie, lo cual implica

$$H_{Cu} = H_{Acero}.$$

El flujo de calor a través de la barra de acero se determina

$$H = \frac{k_{acero} A \left(T_H - T_C\right)}{L_2}.$$

Usando el resultado de la parte (a) se determina la longitud L_2

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{k_{acero} A \left(T_H - T_C\right)}{H} \\ &= \frac{385 \text{ W/K·m} \cdot 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 35 \text{ K}}{5.39 \text{ W}} = 0.242 \text{ m}. \end{aligned}$$

La longitud L_2 que tiene el tramo de acero es 0.242 m.

2. Dos barras de la misma longitud L, de diferentes materiales (k_1 y k_2) y diferentes áreas de sección transversal ($A_1 = 2A$ y $A_2 = 2A$) se ponen una al lado de la otra y se rodean de material aislante. Las barras están en contacto térmico en cada uno de sus extremos con un sendos depósitos térmicos que mantienen su temperatura constante (ver figura 3.3). Determine el flujo de calor total, en términos de las conductividades térmicas, las áreas, las temperaturas y la longitud de cada barra si $T_2 = T$ y $T_1 = 2T$.

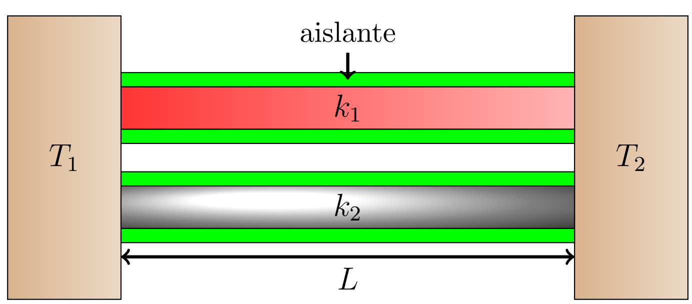


Figura 3.3

Dado que las barras están en paralelo el flujo de calor para este se determina

$$H_{total} = H_1 + H_2$$

donde se tiene

$$H_1 = \frac{k_1 A_1 (T_1 - T_2)}{L} = \frac{2k_1 AT}{L}$$
$$H_2 = \frac{k_2 A_2 (T_1 - T_2)}{L} = \frac{k_2 AT}{L}$$

Con lo anterior se obtiene el flujo de calor total

$$H_{total} = \frac{(2k_1 + k_2) AT}{L}$$

3. Tres barras de longitudes $L_1 = 2L$, $L_2 = L_3 = L$, de diferentes materiales ($k_1 = \frac{1}{3}k$, $k_2 = k$ y $k_3 = 2K$) y áreas de sección transversal ($A_1 = 2A$ y $A_2 = A_3 = A$) se colocan tal y como se muestra en la figura 3.4 y se rodean de material aislante. Las barras están en contacto térmico en cada uno de sus extremos con un sendos depósitos térmicos que mantienen su temperatura constante de tal manera que $T_2 = T$ y $T_1 = 2T$.

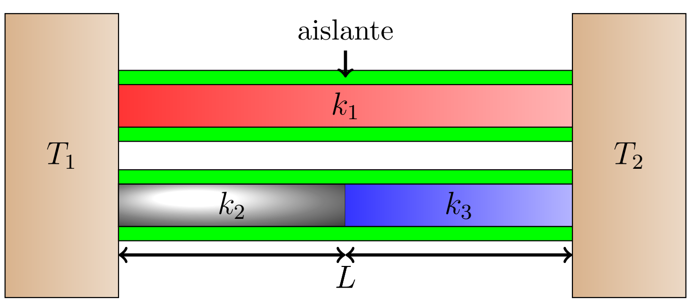


Figura 3.4

A partir de la información anterior determine:

(a) La temperatura en la unión entre las barras 2 y 3.

Dado que las barras 2 se encuentran en serie se tiene

$$H_2 = H_3,$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{k_2 A_2 (T_1 - T_3)}{L} = \frac{kA(2T - T_3)}{L}, \\ H_3 &= \frac{k_3 A_3 (T_3 - T_2)}{L} = \frac{2kA(T_3 - T)}{L}. \end{aligned}$$

Igualando las expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{2kA(T_3 - T)}{L} = \frac{kA(2T - T_3)}{L}.$$

La temperatura en la unión entre las barras 2 y 3 es

$$T_3 = \frac{4}{3}T$$

(b) El flujo de calor total, en términos de k, A, L y T.

Como se mencionó en la parte (a) las barras 2 y 3 están en serie por lo que $H_2 = H_3$ pero la barra 1 esta en paralelo con las otras dos por lo que el flujo de calor total es

$$H_{total} = H_1 + H_2,$$

donde

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{k_1 A_1 (T_1 - T_2)}{L} = \frac{kAT}{3L}, \\ H_2 &= \frac{k_2 A_2 (T_1 - T_3)}{L} = \frac{2kAT}{3L}. \end{aligned}$$

Con los resultados anteriores se obtiene el flujo total de calor

$$H = \frac{kAT}{L}$$

4. Calcule el flujo de calor entre las caras curvas del cuerpo de aluminio de conductividad térmica $k = 238.0$ W/m°C, mostrado en la figura 3.5. Suponga que no hay pérdida de calor por ningún lado.

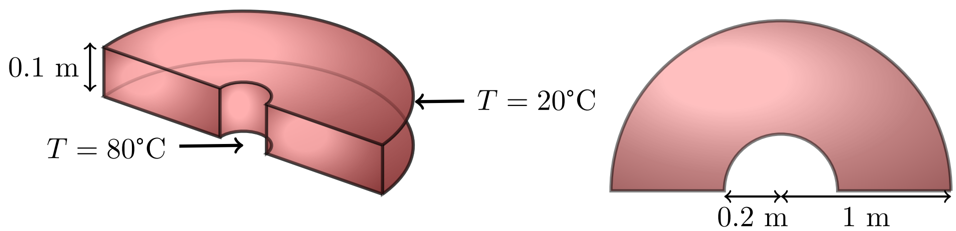


Figura 3.5

Para determinar el flujo de calor por conducción se utiliza la Ley de Fourier para flujos de calor estacionarios

$$H = -kA\frac{dT}{dr}.$$

Para este caso el flujo de calor va en la dirección radial, por lo tanto el área transversal a la dirección de flujo es $A = \pi r L$, donde r es una distancia medida desde el centro del semicirculo a cuaquier parte de la superficie del aluminio.
Usando la ley de Fourier y resolviendo para H se obtiene

$$H = -kA\frac{dT}{dr} \to H\int_a^b \frac{dr}{\pi r L} = -k\int_{T_a}^{T_b} dT \to H = \frac{k\pi L\left(T_a - T_b\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$H = \frac{(238.0 \text{ W/m°C}) \cdot \pi \cdot (0.1 \text{ m})\left(80°C - 20°C\right)}{\ln\left(\frac{1.0 \text{ m}}{0.2 \text{ m}}\right)} = 2787 \text{ W}.$$

El flujo de calor entre las caras curvas del cuerpo de aluminio es 2787 W.

5. Suponga que cierto reactor pequeño se encuentra revestido con un cascarón esférico de hierro ($k = 73$ W/m°C). Los radios interior y exterior del cascarón son $r_2 = 0.44$ m y $r_1 = 0.61$ m respectivamente. Si la corriente de calor que fluye hacia afuera es H=3700 W y la temperatura interior es $T_2 = 343$°C. Halle la temperatura T_1 de la superficie exterior.

   Para determinar el flujo de calor por conducción se utiliza la Ley de Fourier para flujos de calor estacionarios

$$H = -kA\frac{dT}{dr}.$$

   Para este caso el flujo de calor va en la dirección radial, por lo tanto el área transversal a la dirección de flujo es $A = 4\pi r^2$, donde r es una distancia medida desde el centro del semicirculo a cuaquier parte del cascarón de hierro.
   Usando la ley de Fourier y resolviendo para T_1 se obtiene

$$\begin{aligned}
&H = -kA\frac{dT}{dr} \\
&\to H\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{4\pi r^2} = -k\int_{T_2}^{T_1} dT \\
&\to H\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 4\pi k\left(T_2 - T_1\right) \\
&\to T_1 = T_2 - \frac{H}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \\
&\qquad = 343°C - \frac{3700\text{ W}}{4\pi\cdot(238.0\text{ W/m°C})}\left(\frac{1}{0.44\text{ m}} - \frac{1}{0.61\text{ m}}\right) \\
&\qquad = 340.4°\text{C}.
\end{aligned}$$

La temperatura T_1 de la superficie exterior es de 340.4°C.

6. Considere una esfera hueca de radio interno 0.150 m y radio externo 0.600 m. La esfera está hecha de un material cuya conductividad térmica está dada por la siguiente relación: $k = k_0 r$, donde $k_0 = 1.50$ W/m^{2}K y r es la distancia radial medida a partir del centro de la esfera. Si la parte interna de la esfera está a 20°C y la parte externa de la esfera está a 100°C, calcule:

   (a) El flujo calórico radial a través de la esfera.

   Para determinar el flujo de calor por conducción se utiliza la Ley de Fourier para flujos de calor estacionarios

$$H = -kA\frac{dT}{dr}.$$

   Para este caso el flujo de calor va en la dirección radial, por lo tanto el área transversal a la dirección de flujo es $A = 4\pi r^2$, donde r es una distancia medida desde el centro del semicirculo a cuaquier parte de la esfera.
   Usando la ley de Fourier y resolviendo para H se obtiene

$$H = -kA\frac{dT}{dr} \rightarrow H\int_a^b \frac{dr}{4\pi k_0 r^3} = k\int_{T_a}^{T_b} dT$$

$$\rightarrow H = \frac{8\pi k_0 \left(T_b - T_a\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} \tag{3.1}$$

   Usando la información del enunciado se obtiene el flujo de calor

$$H = \frac{8\pi\left(1.50\ \text{W/m·K}\right)\cdot\left(293.15\ \text{K} - 373.15\ \text{K}\right)}{\left(\frac{1}{(0.600\ \text{m})^2} - \frac{1}{(0.150\ \text{m})^2}\right)}$$
$$= 72.4\ \text{W}.$$

   El flujo calórico radial a través de la esfera es de 72.4 W.

(b) La temperatura a una distancia del centro de 30 cm.

Usando la ecuación (3.1), con T_c y $c = 30$ cm, y resolviendo para T_c

$$\rightarrow H = \frac{8\pi k_0 \left(T_c - T_a\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)}$$

$$\rightarrow T_c = T_a + \frac{H}{8\pi k_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)$$

$$= 373.15\ \text{K} - \frac{72.4\ \text{W}}{8\pi\left(1.50\ \text{W/m·K}\right)}\left(\frac{1}{\left(0.600\ \text{m}\right)^2} - \frac{1}{\left(0.300\ \text{m}\right)^2}\right)$$

$$= 357.15\ \text{K}.$$

La temperatura a una distancia del centro de 30 cm es 357.15 K.

7. Determine el flujo a través de un material con conductividad térmica k_0. El material tiene un extremo a una temperatura de 100°C y el otro extremo a una temperatura de 0°C y tiene la siguiente configuración

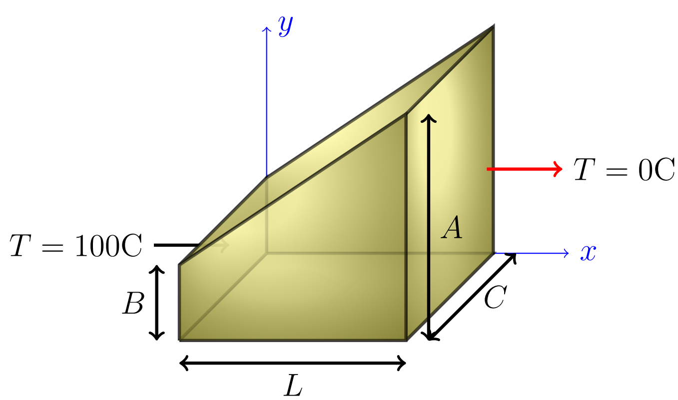


Figura 3.6

Usando la Ley de Fourier para flujos de calor estacionarios

$$H = -kA\frac{dT}{dx}.$$

Para este caso el flujo de calor viaja en la dirección $+x$, esto de acuerdo con el sistema de referencia de la figura 3.6, por lo tanto el área transversal a la dirección de flujo es $A = Cy$, donde y es una distancia medida desde la base del objeto a cualquier punto sobre la línea inclinada. Para este caso la relación entre y y x es

$$y = mx + b$$

$$\rightarrow dx = \frac{dy}{m},$$

donde $b = 0$ y

$$m = \frac{A - B}{L}$$

Con ayuda de la información anterior se obtiene el flujo de calor

$$H = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\rightarrow H\int_B^A \frac{kLdy}{(A-B)\,Cy} = -k\int_{T_B}^{T_A} dT$$

$$\rightarrow H = \frac{(A-B)\,kC}{L\ln\left(\frac{A}{B}\right)}\left(T_B - T_A\right)$$

$$= \frac{100°\text{C}\,(A-B)\,kC}{L\ln\left(\frac{A}{B}\right)}.$$

El flujo de calor a través del material

$$H = \frac{100°\text{C}\,(A-B)\,kC}{L\ln\left(\frac{A}{B}\right)}.$$

8. La temperatura de operación del filamento de tungsteno de un bombillo ($e = 0,35$) es de 2450 K. Calcule el área superficial del filamento de una lámpara de 100 W si un 90% de la energía eléctrica consumida por la lámpara es radiada por el filamento como ondas electromagnéticas.

   Usando la expresión para determinar el flujo de calor por radiación se determina el área superficial del filamento de la lámpara

$$
\begin{aligned}
H &= e\sigma A T^4 \\
\rightarrow A &= \frac{H}{e\sigma T^4} \\
&= \frac{90 \text{ W}}{0.35 \cdot \left(5.76 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4\right) \cdot (2450 \text{ K})^4} \\
&= 1.26 \times 10^{-4} \text{ m}^2
\end{aligned}
$$

   El área superficial del filamento de la lámpara es 1.26×10^{-4} m^2.

9. Suponga que para el hierro la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura desde 73,2 (W/K m) a 293 K hasta 54,0 (W/K m) a 573 K. Considerando una barra de hierro de 74,2 cm de longitud y 3,25 cm^2 de sección transversal, recubierta con un material aislante, cuyos extremos se encuentran en contacto térmico con un depósito a 20°C y con otro a 300°C, determine:

   (a) La relación entre la conductividad térmica y la temperatura.

   Para este caso se tiene que la conductividad térmica varia linealmente con la temperatura eso quiere decir que la relación es del tipo:

$$k = mT + b$$

   donde

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{k_2 - k_1}{T_2 - T_1} \\
&= \frac{54,0(W/K \cdot m) - 73,2(W/K \cdot m)}{573 \text{ K} - 293 \text{ K}} \\
&= -0,07 \text{ W/m} \cdot \text{K}^2
\end{aligned}
$$

y donde b se determina:

$$
\begin{aligned}
b &= k - mT \\
&= 54,0(W/K \cdot m) - \left(-0,07\ \mathrm{W/m{\cdot}K^2}\right) \cdot 573\ \mathrm{K} \\
&= 94.1(W/K \cdot m)
\end{aligned}
$$

La relación entre la conductividad térmica y la temperatura es

$$k = -\left(0,07\ \mathrm{W/m \cdot K^2}\right) \cdot T + 94,1(W/K \cdot m)$$

(b) El flujo de calor (corriente calorífica).

Para este caso se tiene que la conductividad térmica es variable, el área de la sección transversal a la dirección de flujo es constante $A = 3,25\ \mathrm{m}^2$ y por ultimo se tiene que la temperatura es variable con respecto a la coordenada de la longitud de la barra, por lo que para este caso el flujo viene determinado por:

$$
\begin{aligned}
H &= -kA\frac{dT}{dx} \\
\rightarrow H\int_0^L dx &= -\int_{T_0}^{T_L} kAdT \\
\rightarrow H\int_0^L dx &= -A\int_{T_0}^{T_L} (mT + b)\, dT \\
\rightarrow H &= -\frac{A}{L}\left(\frac{m}{2}T^2 + bT\right)\Big|_{T_0}^{T_L} \\
&= 78220\ \mathrm{W}
\end{aligned}
$$

El flujo de calor es de 78220 W.

3.4 Problemas propuestos

1. Cuando la temperatura de un cilindro de metal, isotrópico, se eleva de 60°C a 100°, su longitud aumenta en 0.092%. Calcule:

   (a) El cambio porcentual en el área transversal del cilindro. R/ 0.184%

   (b) El cambio porcentual en la densidad del cilindro. R/ 0.275%

2. Se supone que el proceso de enlatado de bebidas gaseosas se realiza a una temperatura de 5.0°C. El líquido se puede considerar como agua ($\beta_{agua} = 2.1 \times 10^{-4}$ K^{-1}). Para una mejor conservación, se deja un espacio vacío en la lata. El volumen del envase de aluminio ($\alpha_{aluminio} = 2.4 \times 10^{-5}$ K^{-1}) es de 400.000 mL a la temperatura de 5.0°C. Obtener el volumen que se debe dejar vacío en la lata para que la bebida pueda dilatarse al aumentar la temperatura, sin que la lata explote. Se considera que la temperatura máxima a la cual la lata y su contenido pueden ser expuestos es de 65.0°C. R/ 3.271 ml

3. En un recipiente de aluminio de 50.0 g de masa, aislado térmicamente, se encuentra contenida en equilibrio térmico, una mezcla de 200.0 g de agua y 300.0 g de vapor de agua. Si se introduce en el recipiente un cubo de cobre de 50.0 g que está inicialmente a −79.0°C, determine:

   (a) La temperatura final de equilibrio del sistema. R/ 100°C

   (b) La composición final de la mezcla. R/ $m_v = 298.5$ g, $m_a = 201.5$ g, $m_{Al} = 50$ g y $m_{Cu} = 50$ g

$c_{agua} = 4186$ J/kg°C	$c_{hielo} = 2090$ J/kg°C	$c_{vapor} = 2010$ J/kg°C
$c_{cobre} = 387$ J/kg°C	$c_{Al} = 900$ J/kg $\cdot \circ$C	$L_v = 22.6 \times 10^5$ J/kg

4. Un calorímetro de cobre, de masa 750.0 g, se encuentra en equilibrio termodinámico con 250.0 g de hielo a 0.00°C. Se agrega al calorímetro 68.0 g de agua a 75.00°C y 17.0 g de vapor a 100.00°.

   (a) Calcule la temperatura final de equilibrio de la mezcla. R/ 0°C

   (b) ¿Cuál es la composición final de la mezcla? R/ $m_v = 0$ g, $m_a = 285$ g, $m_h = 50$ g y $m_{Cu} = 750$ g

$c_{agua} = 4186$ J/kg°C	$c_{hielo} = 2090$ J/kg°C	$c_{vapor} = 2010$ J/kg°C
$c_{cobre} = 387$ J/kg°C	$L_f = 3.33 \times 10^5$ J/kg	$L_v = 22.6 \times 10^5$ J/kg

5. Un calorímetro de cobre de 0.322 kg contiene 0.0420 kg de hielo. El sistema está a 0.0°. Si dentro del calorímetro se licua 0.0120 kg de vapor de agua a 100° y 1.00 atm de presión.

   (a) ¿Qué temperatura final alcanza el calorímetro y su contenido? R/ 51.8°C

   (b) Cuando alcanza la temperatura de equilibrio, ¿cuántos kilogramos de hielo, agua liquida y vapor están presentes. R/ $m_v = 0$ g, $m_a = 54$ g, $m_h = 0$ g y $m_{Cu} = 322$ g

6. Una tubería cilíndrica hueca (de gran longitud) está hecha de acero, tiene una radio interno de 5.00 cm y un espesor de 0.50 cm. La tubería tiene un recubrimiento de caucho de 3.00 cm de espesor. Suponga que la pared interna de la tubería está a la temperatura de 125.0°C y la temperatura sobre la pared externa del recubrimiento de caucho es 40.0°C. En el estado estacionario, determine:

   (a) La temperatura en la interfaz caucho-acero.

   (b) El flujo de calor a través de un segmento de 1.0 m de longitud de la tubería.

   (c) Una expresión para la temperatura, en función del radio, en cualquier punto dentro del caucho.

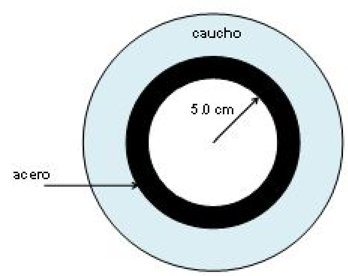


Figura 3.7

7. Considere una esfera hueca de radio interno 0.150 m y radio externo 0.600 m. La esfera está hecha de un material cuya conductividad térmica está dada por la siguiente relación: $k = k_0 r$, donde $k_0 = 1.50$ W/m^{2}K y r es la distancia radial medida a partir del centro de la esfera. Si la parte interna de la esfera está a 20^0C y la parte externa de la esfera está a 100^0C, calcule:

   (a) El flujo calórico radial a través de la esfera. R/ 36.2 W

(b) La temperatura a una distancia del centro de 30 cm. R/ 84°C

8. Un recipiente cúbico de 20 cm de arista, de paredes negras y de masa despreciable, se encuentra en una habitación que está a la temperatura de 25°C. El recipiente está lleno de agua a una temperatura de 100°C. Calcule la taza de enfriamiento inicial del agua en el recipiente, $\frac{dT}{dt}$, donde T es la temperatura y t es el tiempo. R/ 3.21×10^{-3} °C/s

4

Leyes de la termodinámica

4.1 Primera y segunda ley de la termodinámica

1. Se tiene un mol de un gas ideal diatómico a una presión de 1.50 atm y un volumen de 3.50 L. El gas experimenta los siguientes procesos:

$1 \to 2$: un proceso isocórico hasta el estado 2 a 3.00 atm.

$2 \to 3$: una expansión isotérmica hasta el estado 3 a 2.00 atm.

$3 \to 4$: una compresión isobárica hasta el estado 4 a 256 K.

$4 \to 5$: una compresión isotérmica hasta el estado 5.

$5 \to 1$: una expansión adiabática hasta el estado 1.

A partir de la información anterior:

(a) Calcular el valor de las propiedades termodinámicas (p, V, T) para cada estado.

Usando la ecuación del gas ideal se determinan T_1, T_2, V_3 y V_4

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1.520 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 3.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol}} = 64 \text{ K},$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{3.039 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 3.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol}} = 128 \text{ K},$$

$$V_3 = \frac{nRT_3}{p_3} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot 128 \text{ K}}{2.026 \times 10^5 \text{ Pa}} = 5.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$V_4 = \frac{nRT_4}{p_4} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot 256 \text{ K}}{2.026 \times 10^5 \text{ Pa}} = 10.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A partir de la ley de Boyle y la ecuación de un gas en un proceso adiabático se tiene

$$p_5 V_5 = p_4 V_4 \rightarrow p_5 = \frac{p_4 V_4}{V_5}, \tag{4.1}$$

$$p_5 V_5^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}, \tag{4.2}$$

donde $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1.40$.
Sustituyendo (4.1) en (4.2) se determina V_5

$$V_5 = \left(\frac{p_1 V_1^{\gamma}}{p_4 V_4} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left(\frac{1.520 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(3.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3\right)^{1.40}}{2.026 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 10.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \right)^{\frac{1}{0.40}}$$

$$= 0.109 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

finalmente, usando la ecuación (4.1) se determina p_5

$$p_5 = \frac{p_4 V_4}{V_5} = \frac{2.026 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 10.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{0.109 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 195 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Punto	Presión ($\times 10^5$ Pa)	Volumen ($\times 10^{-3}$ m^3)	Temperatura (K)
1	1.520	3.50	64
2	3.039	3.50	128
3	2.026	5.25	128
4	2.026	10.5	256
5	195.2	0.109	256

Tabla 4.1

(b) Calcular el cambio de energía interna, el trabajo y el calor para cada proceso del ciclo anterior.

Primero se determina, para este caso, la energía interna en cada proceso del ciclo.

- Proceso $1 \to 2$ (isocórico).

$$\Delta U_{12} = nC_V \Delta T_{12} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (128 \text{ K} - 64 \text{ K})$$
$$= 1330 \text{ J}.$$

- Proceso $2 \to 3$ (isotérmico).

$$\Delta U_{23} = 0.$$

- Proceso $3 \to 4$ (isobárico).

$$\Delta U_{34} = nC_V \Delta T_{34} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (256 \text{ K} - 128 \text{ K})$$
$$= 2660 \text{ J}.$$

- Proceso $4 \to 5$ (isotérmico).

$$\Delta U_{45} = 0.$$

- Proceso $5 \to 1$ (adiabático).

$$\Delta U_{51} = nC_V \Delta T_{51} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (64 \text{ K} - 256 \text{ K})$$
$$= -3990 \text{ J}.$$

A continuación se determina el trabajo realizado por o sobre el gas en cada proceso del ciclo.

- Proceso $1 \to 2$ (isocórico)

$$W_{12} = 0.$$

- Proceso $2 \to 3$ (isotérmico)

$$W_{32} = nRT \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot 128 \text{ K} \ln\left(\frac{5.25}{3.50}\right)$$
$$= 431.5 \text{ J}.$$

- Proceso $3 \to 4$ (isobárico)

$$W_{34} = p\Delta V_{34} = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot (10.5 - 5.25) \times 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$= 1064 \text{ J}.$$

- Proceso $4 \to 5$ (isotérmico)

$$W_{45} = nRT \ln\left(\frac{V_5}{V_4}\right) = 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot 256 \text{ K} \ln\left(\frac{0.109}{10.5}\right)$$
$$= -9722 \text{ J}.$$

- Proceso $5 \to 1$ (adiabático)

$$W_{51} = -\Delta U_{51} = 3990 \text{ J}.$$

Finalmente usando la primera ley de la termodinámica se detter-mina el calor absorbido o cedido por el gas

- Proceso $1 \to 2$ (isocórico)

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = 1330 \text{ J}.$$

- Proceso $2 \to 3$ (isotérmico)

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + W_{23} = 431.5 \text{ J}.$$

- Proceso $3 \to 4$ (isobárico)

$$Q_{34} = \Delta U_{34} + W_{34} = 2660 \text{ J} + 1064 \text{ J} = 3724 \text{ J}.$$

- Proceso $4 \to 5$ (isotérmico)

$$Q_{45} = \Delta U_{45} + W_{45} = -9722 \text{ J}.$$

- Proceso $5 \to 1$ (adiabático)

$$Q_{51} = \Delta U_{51} + W_{51} = 0.$$

El cambio de energía interna, el trabajo y el calor en cada proceso del ciclo son

etapa	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 5$	$5 \to 1$
ΔU (J)	1330	0	2660	0	-3990
Trabajo (J)	0	431.5	1064	-9722	3990
Calor (J)	1330	431.5	3724	-9722	0

Tabla 4.2

2. Cincuenta moles de un gas ideal monoatómico se someten al ciclo mostrado en la figura 4.1 en la dirección indicada, donde el proceso $c - d$ es una recta en el diagrama pV. A partir de la información anterior calcule

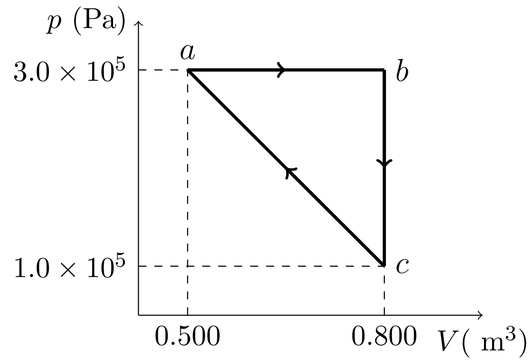


Figura 4.1

(a) El calor de cada etapa e identifique en cuales etapas se absorbe calor y en cuales se emite

A partir de la información anterior se tiene

Punto	Presión ($\times 10^5$ Pa)	Volumen (m^3)	Temperatura (K)
a	3.00	0.500	360
b	3.00	0.800	577
c	1.00	0.800	192

Tabla 4.3

donde las temperaturas se obtuvieron a partir de la ecuación del gas ideal

$$T_a = \frac{p_a V_a}{nR} = \frac{3.00 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.500 \text{ m}^3}{50 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol}} = 360 \text{ K},$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{nR} = \frac{3.00 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.800 \text{ m}^3}{50 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol}} = 577 \text{ K},$$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{3.00 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.500 \text{ m}^3}{50 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol}} = 192 \text{ K}.$$

Con la información de la tabla 4.3 se determina el calor en ganado o perdido por el gas en cada etapa.

- Proceso $a - b$ (isobárico)

$$Q_{ab} = nC_p \Delta T_{ab} = 50 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (577 \text{ K} - 360 \text{ K})$$

$$= 226 \text{ kJ}.$$

- Proceso $b - c$ (isocórico)

$$Q_{bc} = nC_V \Delta T_{ab} = 50 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (192 \text{ K} - 577 \text{ K})$$

$$= -240 \text{ kJ}.$$

- Proceso $c - a$
  Primero se determina el cambio en la energía interna del gas

$$\Delta U_{ca} = nC_V \Delta T_{ca} = 50 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (360 \text{ K} - 192 \text{ K})$$

$$= 105 \text{ kJ}.$$

  El trabajo realizado sobre el gas se determina

$$W_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} p dV$$

donde de acuerdo con la figura la relación entre p y V es lineal

$$p = mV + b,$$

donde $m = -6.667 \times 10^5$ Pa/m^3 y $b = 6.335 \times 10^5$ Pa.
Con ayuda de lo anterior se obtiene el trabajo realizado sobre el gas en el proceso $c - a$

$$W_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} pdV = \int_{V_c}^{V_a} (mV + b)\, dV = \left(\frac{m}{2}V^2 + bV\right)\Big|_{V_c}^{V_a} = -60 \text{ kJ}.$$

Finalmente usando la primera ley de la termodinámica se obtiene

$$Q_{ca} = \Delta U_{ca} + W_{ca} = 105 \text{ kJ} - 60 \text{ kJ} = 45 \text{ kJ}.$$

El calor ganado por el gas en el proceso $a - b$ es de 226 kJ, en el proceso $b - c$ el calor gas perdido por el gas fue de 240 kJ de calor y en el proceso $c - a$ el calor ganado por el gas es de 45 kJ.

(b) La eficiencia del ciclo.
La eficiencia del ciclo se determina

$$e = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|,$$

donde para este caso se tiene

$$Q_C = -240 \text{ kJ},$$

$$Q_H = 226 \text{ kJ} + 45 \text{ kJ} = 271 \text{ kJ},$$

con lo que se obtiene

$$e = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| = 1 - \left|\frac{240 \text{ kJ}}{271 \text{ kJ}}\right| = 0.11.$$

La eficiencia del ciclo es de 11%.

3. Un mol de un gas ideal diatómico se somete a un proceso cíclico que se muestra en la figura 4.2, donde el proceso $A-B$ es isotérmico, el proceso $B-C$ es isocórico y el proceso $C-A$ es adiabático. Para este caso se tiene $V_A = 0.024$ m^3, $V_B = 0.224$ m^3 y $T_A = 900$ K.

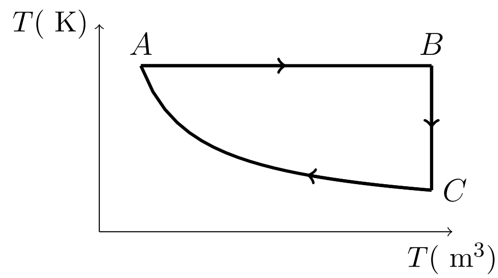


Figura 4.2

Con base en la información:

(a) Dibuje el diagrama $P-V$. Para cada uno de los estados principales determine los valores numéricos de presión y volumen

A partir de la información anterior se tiene

Punto	Presión ($\times 10^5$ Pa)	Volumen (m^3)	Temperatura (K)
a	3.12	0.024	900
b	0.334	0.224	900
c	0.137	0.224	369

Tabla 4.4

donde los valores de presión, volumen y temperatura se determinaron con ayuda de la ecuación del gas ideal y la ecuación de procesos adiabáticos de la siguiente manera

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \frac{1\text{ mol} \cdot 8.314\text{ J/K}\cdot\text{ mol} \cdot 900\text{ K}}{0.024\text{ m}^3} = 3.12 \times 10^5\text{ Pa},$$

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{1\text{ mol} \cdot 8.314\text{ J/K}\cdot\text{ mol} \cdot 900\text{ K}}{0.224\text{ m}^3} = 0.334 \times 10^5\text{ Pa},$$

$$p_C = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} p_A = \left(\frac{0.024\text{ m}^3}{0.224\text{ m}^3}\right)^{1.40} \cdot 3.12 \times 10^5\text{ Pa} = 0.137 \times 10^5\text{ Pa},$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{0.137 \times 10^5\text{ Pa} \cdot 0.224\text{ m}^3}{1\text{ mol} \cdot 8.314\text{ J/K}\cdot\text{ mol}} = 369\text{ K}$$

con ayuda de la información de la tabla 4.4 se obtiene la gráfica de presión contra volumen

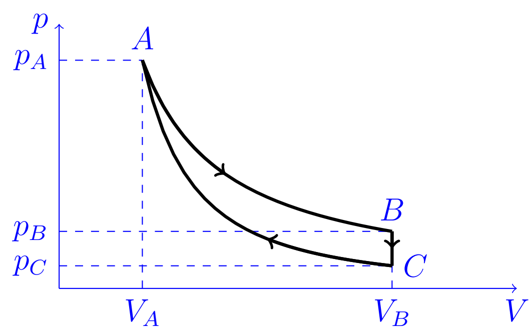


Figura 4.3

(b) Calcule el cambio de energía, el trabajo y el calor en cada etapa.

⋆ Cambios de energía interna

Proceso $A - B$ (Isotérmico)

$$\Delta U_{AB} = 0.$$

Proceso $B - C$ (Isocórico)

$$\Delta U_{BC} = nC_V \Delta T_{BC} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (369 \text{ K} - 900 \text{ K})$$

$$= -11.0 \text{ kJ}.$$

Proceso $C - A$ (Adiabático)

$$\Delta U_{CA} = nC_V \Delta T_{CA} = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot (900 \text{ K} - 369 \text{ K})$$

$$= 11.0 \text{ kJ}.$$

⋆ Trabajo

Proceso $A - B$ (Isotérmico)

$$W_{AB} = nRT \ln \left| \frac{V_B}{V_A} \right| = 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{ mol} \cdot 900 \text{ K} \cdot \ln \left| \frac{0.224 \text{ m}^3}{0.024 \text{ m}^3} \right|$$

$$= 16.7 \text{ kJ}.$$

Proceso $B-C$ (Isocórico)

$$W_{BC}=0.$$

Proceso $C-A$ (Adiabático)

$$W_{CA}=-\Delta U_{CA}=-11.0 \text{ kJ}.$$

⋆ Calor

El calor en cada etapa se determina usando la primera ley de la termodinámica

Proceso $A-B$ (Isotérmico)

$$Q_{AB}=\Delta U_{AB}+W_{AB}=16.7 \text{ kJ}.$$

Proceso $B-C$ (Isocórico)

$$Q_{BC}=\Delta U_{BC}+W_{BC}=-11.0 \text{ kJ}.$$

Proceso $C-A$ (Adiabático)

$$Q_{CA}=0.$$

El cambio de energía interna, el trabajo y el calor en cada etapa fue

etapa	$A-B$	$B-C$	$C-A$
ΔU (kJ)	0	-11.0	11.0
Trabajo (kJ)	16.7	0	-11.0
Calor (kJ)	16.7	-11.0	0

Tabla 4.5

(c) Calcule la eficiencia del proceso

La eficiencia del proceso se determina

$$e=1-\left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|,$$

donde para este caso se tiene

$$Q_C=-11.0 \text{ kJ},$$

$$Q_H=16.7 \text{ kJ},$$

con lo que se obtiene

$$e = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| = 1 - \left|\frac{-11.0\ \text{kJ}}{16.7\ \text{kJ}}\right| = 0.34.$$

La eficiencia del proceso es de 34%.

(d) Calcule el cambio de entropía en cada etapa del proceso

El cambio de entropía en cada etapa del proceso se determina

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

Para el proceso $A - B$ (isotérmico) se tiene

$$\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{AB}}{T}\frac{16.7 \times 10^3\ \text{J}}{900\ \text{K}} = 18.6\ \text{K/J}.$$

Para el proceso $B - C$ (isocórico) se tiene

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{nC_V dT}{T} = \frac{5}{2} nR \ln\left|\frac{T_C}{T_B}\right|$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 1\ \text{mol} \cdot 8.314\ \text{J/K} \cdot\ \text{mol} \cdot \ln\left|\frac{369\ \text{K}}{900\ \text{K}}\right| = -18.6\ \text{K/J}.$$

Para el proceso $C - A$ (adiabático) se tiene

$$\Delta S_{CA} = 0$$

El cambio de entropía en el proceso $A - B$ es de 18.6 J/K, el cambio de entropía en el proceso $B - C$ es de -18.6 J/K y el cambio de entropía en el proceso $C - A$ es cero.

4. Considere un bloque de hielo de 10.0 g de masa que se lleva de una temperatura inicial de −15.0 °C hasta una temperatura final de 120.0 °C.

   (a) Calcule el cambio en la entropía que experimenta un bloque

   El cambio en entropía del bloque de hielo se determina

$$\Delta S_h = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

   Para este caso

$$\Delta S_h = \int_{T_h}^{T_0} \frac{m_h c_h dT}{T} + \frac{m_h L_f}{T_0} + \int_{T_0}^{T_v} \frac{m_h c_a dT}{T} + \frac{m_h L_v}{T_v} + \int_{T_v}^{T_f} \frac{m_h c_v dT}{T},$$

   donde $T_h = 268.15$ K, $T_0 = 273.15$ K, $T_v = 373.15$ K y $T_f = 393.15$ K, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta S_h =& m_h \left(c_h \ln\left(\frac{T_0}{T_h}\right) + \frac{L_f}{T_0} + c_a \ln\left(\frac{T_v}{T_0}\right) + \frac{L_v}{T_v} + c_v \ln\left(\frac{T_f}{T_v}\right)\right) \\ =& 87.24 \text{ J/K}\end{aligned}$$

   El cambio en la entropía que experimenta un bloque de hielo es de 87.24 J/K.

   (b) Hallar la masa de un bloque de hierro ($C = 3R$) que experimenta el mismo cambio en la entropía del bloque de hielo, entre las mismas temperaturas extremas.

   Para este caso se tiene que el cambio de entropía se determina

$$\begin{aligned}\Delta S_{Fe} &= \int_{T_h}^{T_f} \frac{nCdT}{T} \\ &= 3nR \ln\left(\frac{T_f}{T_h}\right).\end{aligned}$$

   A partir de lo anterior se determina la cantidad de sustancia n de hierro necesaria para ese cambio de entropía

$$n = \frac{\Delta S_{Fe}}{3R \ln\left(\frac{T_f}{T_h}\right)} = 9.14 \text{ mol}.$$

Usando la relación entre la masa de una sustancia y su masa molar se determina la cantidad de masa del bloque de hierro

$$\begin{aligned} m &= nM = 9.14 \text{ mol.} \cdot 55.847 \text{ g/mol} \\ &= 510.4 \text{ g} \end{aligned}$$

La masa de un bloque de hierro que experimenta el mismo cambio en la entropía del bloque de hielo, entre las mismas temperaturas extremas es 510.4 g.

5. Se vierten 250 g de agua a 90.0 °C en el océano, que está a 20.0 °C. Trate el agua que vertió más el océano como un sistema aislado. Una vez el sistema ha alcanzado el equilibrio termodinámico, calcule:

   (a) El cambio de entropía del agua vertida

   El cambio de entropía del agua caliente se determina

$$\Delta S_a = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

   Para este caso se tiene

$$\Delta S_a = \int_{T_i}^{T_f} \frac{m_a c_a dT}{T},$$

   donde $T_i = 363.15$ K y $T_f = 293.15$ K, con lo que se obtiene

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -224.1 \text{ J/K}$$

   El cambio de entropía del agua vertida es -224.1 J/K.

   (b) El cambio de entropía del océano.

   El cambio de entropía del oceáno es a temperatura constante por lo que se determina

$$\Delta S = \frac{Q_O}{T_f}$$

donde el calor ganado por el océano se determina

$$\begin{aligned}\sum Q &= Q_O + Q_a = 0\\ \rightarrow Q_O &= -Q_a = m_a c_a \Delta T_a\\ &= 73255 \text{ J},\end{aligned}$$

Con el resultado anterior se obtiene el cambio de entropía del océano se determina

$$\Delta S = \frac{Q_O}{T_f} = \frac{73255 \text{ J}}{293.15 \text{ K}} = 249.9 \text{ J/K}$$

El cambio de entropía del 0céano es 229.9 J/K.

(c) El proceso es reversible o irreversible, de una respuesta fundamentada en argumentos cuantitativos.

Para saber si el proceso es reversible o irreversible se determiina el cambio de entropía total

$$\Delta S_T = \Delta S_O + \Delta S_a = 25.8 \text{ J/K}.$$

El proceso es irreversible.

4.2 Problemas propuestos

1. Un cilindro con un pistón contiene 0.400 mol de nitrógeno (N_2) a 2.0×10^5 Pa y 300 K. El nitrógeno puede ser tratado como un gas ideal. Primero, el gas se comprime a presión constante hasta la mitad de su volumen original, luego se expande adiabáticamente de vuelta a su volumen original, y por último se calienta a volumen constante hasta su presión original.

   (a) Indique estos procesos en un diagrama $p - V$. Indique los valores numéricos de la presión y el volumen para los estados principales.

   R/ $p_1 = p_2 = 2.0 \times 10^5$ Pa, $p_3 = 0.76 \times 10^5$ Pa, $V_1 = V_3 = 5.0 \times 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 2.5 \times 10^{-3}$ m^3

   (b) Calcule el calor de cada etapa e identifique en cuales etapas se absorbe calor y en cuales se emite.

   R/ $Q_{12} = -1746$ J, $Q_{23} = 0$, $Q_{31} = 1544$ J

2. Dos moles de gas monoatómico se someten al ciclo termodinámico mostrado en la figura 4.4.

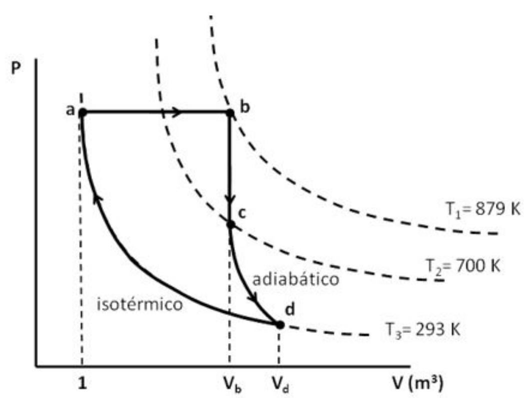


Figura 4.4

Determine:

(a) El cambio en la energía interna, el calor y el trabajo en cada uno de los procesos y en el ciclo.

R/ $\Delta U_{ab} = 14616$ J, $\Delta U_{bc} = -4465$ J, $\Delta U_{cd} = -10151$ J, $\Delta U_{da} = 0$, $W_{ab} = 9744$ J, $W_{bc} =$, $W_{cd} = 10151$ J, $Wda = -11727$ J, $Q_{ab} = 24360$ J, $Q_{bc} = -4465$ J, $Q_{cd} = 0$, $Q_{da} = -11727$ J.

(b) El cambio de entropía en cada proceso de dicho ciclo .

R/ $\Delta U_{ab} = 45.7$ J/K, $\Delta S_{bc} = -5.68$ J/K, $\Delta S_{cd} = 0$, $\Delta S_{da} = -40.0$ J/K.

3. Tres moles de oxígeno (O_2), que se comporta como un gas ideal, está sujeto a los procesos termodinámicos que se presentan en la siguiente figura 4.5. Basado en esta información anterior determine:

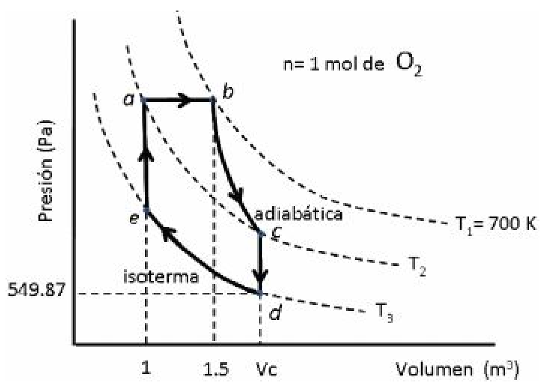


Figura 4.5

(a) Las temperaturas T_2 y T_3 y el volumen V_c

(b) El calor transferido en cada uno de los procesos del ciclo.

(c) La eficiencia de ciclo termodinámico.

(d) La eficiencia de una máquina térmica de Carnot que opere entre las temperaturas extremas del ciclo anterior.

4. Un cubo de hielo de 0,0600 kg a una temperatura inicial de $-20,0$ °C se coloca en 0,500 kg de agua a $45,0$ °C en un recipiente aislado con masa despreciable. El sistema alcanza el equilibrio a una temperatura de 30,6°C. $c_{agua} = 4190$ J/kg °C, $c_{hielo} = 2090$ J/kg °C, $L_f = 3.33 \times 10^5$ J/kg Con base en esta información:

(a) Calcule el cambio de entropía del sistema.

(b) Explique, cuantitativamente, si el proceso es reversible o irreversible.

5. Sobre un gran depósito caliente (reservorio térmico) se coloca 1,500 kg de hielo a -15 °C. Luego el hielo se funde y alcanza la temperatura de $27,0$ °C. Si el sistema del depósito y el hielo está completamente aislado, entonces calcule:

   (a) El cambio de entropía del depósito.

   (b) El cambio de entropía del hielo.

   (c) El cambio de entropía total del sistema.

6. Un tazón de cobre de 146.0 g contiene 223.0 g de agua; el tazón y el agua están a una temperatura de 21.0°C. Se deja caer en el agua un cilindro de cobre que tiene una masa de 314.0 g y está a una temperatura de $826,1$°C. Esto hace hervir el agua provocando que 4.7 g se conviertan en vapor. La temperatura de equilibrio de este sistema es 100°C. Calcule:

   (a) El cambio de entropía del agua.

   (b) El cambio de entropía del tazón.

   (c) El cambio de entropía del cilindro.

   (d) El cambio de entropía total del sistema (Universo).

   (e) ¿Este proceso es reversible o irreversible?, justifique cuantitativamente.