Derivadas parciales

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Definición

En este manual se describe cómo se calulan las derivadas para el cálculo de la incertidumbre combinada. Considere lo que está en este manual como provisional, mientras usted aprende a derivar en el curso de cálculo.

Considere una función $f(x, y)$ cualquiera. La **derivada respecto a x** indica cómo cambia f con la variable x, y la **derivada respecto a y** indica cómo cambia la función f con la variable y.

Por **definición**, la derivada respecto a x es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

y la derivada respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Nota: cuando usted vea derivadas en el curso de cálculo, las funciones serán de una sola variable, por lo que en lugar del símbolo "∂", se usará el símbolo "d". No confunda ambos símbolos.

Ejemplo 1

Considere el área de un rectángulo, que se calcula con la fórmula $A = xy$, donde x es la base, y y es la altura. Primero que nada, vea que $A(x + \Delta x, y) = (x + \Delta x)y$, y que $A(x, y + \Delta y) = x(y + \Delta y)$. Entonces, calculemos primero la derivada respecto a x:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x, y) - A(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y - xy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{xy} + (\Delta x)y - \cancel{xy}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cancel{\Delta x})y}{\cancel{\Delta x}} = y$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{A(x, y + \Delta y) - A(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y + \Delta y) - xy}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{xy} + x(\Delta y) - \cancel{xy}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(\cancel{\Delta y})}{\cancel{\Delta y}} = x$$

Ejemplo 2

Considere la función $f(x) = x^2 y$. Calculemos ambas derivadas. Para facilitar un poco las cosas, en los pasos intermedios sacaremos algunas variables como factor común.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x)^2 - yx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y \left[\frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} \right] = \frac{0}{0}(\text{indet.})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} y \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2(y + \Delta y) - x^2 y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} x^2 \frac{\cancel{y} + \Delta y - \cancel{y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} x^2 \frac{\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} = x^2$$

Ejemplo 3

Calcule la derivada respecto a x de la función $f(x, y) = A\sqrt{x\,y}$, donde A es una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\sqrt{y}\sqrt{x+\Delta x} - A\sqrt{y}\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\sqrt{y}\left[\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right]}{\Delta x} = \frac{0}{0}(\text{indet.})$$

La técnica recomendada cuando hay límites con raíces es racionalizar:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} A\sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + x}{\sqrt{x+\Delta x} + x} = \lim_{\Delta x \to 0} A\sqrt{y} \cdot \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} A\sqrt{y} \cdot \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{A\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$