

Tarea analítica 1

I-2026

Fecha de entrega: 6 de mayo 2026

1. Demuestre que la ecuación de momento en la forma de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F}$$

es equivalente a la forma conservativa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \nabla \cdot (\rho v_x \vec{v}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x.$$

Sugerencia: reduzca todo a una dimensión

p.ej., $(\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$, $(\nabla \rho)_x = \partial_x \rho$, donde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

y use la ec. de conserv. de masa.

2. Considere las ecuaciones de gravito-hidrodinámica de primer orden

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \text{(a.1)}$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_1 = -c_s^2 \nabla \rho_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1 \quad \text{(b.1)}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad \text{(c.1)}.$$

Introduzca el Ansatz

$$\rho_1 = \rho_{\max} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\max} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\Phi_1 = \Phi_{\max} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

en (a.1), (b.1), (c.1) y demuestre que se obtiene

$$\omega \rho_1 = \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1 \quad \text{(a1F)}$$

$$\omega \rho_0 \vec{v}_1 = \vec{k} c_s^2 \rho_1 + \vec{k} \rho_0 \Phi_1 \quad \text{(b1F)}$$

$$\vec{k}^2 \Phi_1 = -4\pi G \rho_1 \quad (\text{c1F})$$

Sugerencia: si tiene dificultades con manejar el operador ∇ , escriba las ecuaciones componente a componente usando coordenadas cartesianas. Por ejemplo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (\vec{\nabla} \rho)_x = \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \rho = \rho_{\max} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t}.$$

3. Complete los pasos para derivar la ecuación de momento de MHD:

Paso A. Partiendo de la ecuación del momento de HD:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{F}$$

sustituya $\vec{F} \rightarrow \vec{F} + \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B}$. Ahora sustituya $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Quedará un término que contiene $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ que queremos escribir de forma diferente.

Paso B. Considere la identidad

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Sustituya $\vec{A} \rightarrow \vec{B}$ y simplifique. Ahora dele vuelta al producto cruz del último término para formar la expresión $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$.

Paso C. Sustituya $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ por la expresión que encontró en el paso B y demuestre que queda

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}}{\mu_0 \rho} \vec{B}.$$

Tarea programada 2

I-2026

Fecha de entrega: 6 de mayo 2026

Cada uno de los ítems vale lo mismo (25% del total).

1. Descargue el programa `hydro_shock_test` que vimos en clases:

```
https://github.com/gandreoliva/physics_prog_collection/tree/main/  
stellar_oscillations
```

Compile el programa y recuerde crear el directorio `data/`. Corra el programa tal y como está así como lo hicimos en clases, excepto que debe cambiar el valor de la variable `ntmax = 80000` para producir bastantes *outputs*. Use el *jupyter notebook* `hydro_plot.ipynb` para graficar el resultado tal como lo habíamos visto en clases.

2. Ahora experimente: cambie la función `function f_ext(i)` para añadir una fuerza externa constante (pruebe tanto en dirección $+r$ como en $-r$) y grafique sus resultados en el tiempo. Comente: ¿qué cambios ve en la propagación del frente de choque en cada caso?
3. Cambie las condiciones iniciales del programa. Experimente con diferentes valores de n_{gas} , diferentes distribuciones de densidad inicial (pruebe usar una función de r para inicializar la densidad en lugar de un corte como está en el programa original), y pruebe diferentes velocidades iniciales. Prepare un video de la evolución temporal de la densidad en función de r para cada uno de las tres variaciones que probó (n_{gas} , densidad, velocidad).
4. Elija alguno de los casos que probó y cambie el Δt hasta que obtenga un error de la condición CFL. ¿Cuánto es un Δt demasiado grande para ese caso? (Es posible que al haber experimentado en los puntos 2 y 3 haya obtenido un error de este tipo. Alternativamente para responder este punto, puede comentar cómo fue que solucionó el problema).