Universidad de Costa Rica
Escuela de Física
Introducción a la Física Espacial
II-2025

Tarea analítica 1

1. Demuestre que la ecuación de moméntum en la forma de Euler

   $$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P + \vec{\mathbf{F}}$$

   es equivalente a la forma conservativa

   $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \vec{\mathbf{v}}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x.$$

   Sugerencia: reduzca todo a una dimensión

   p.ej., $(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}) = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z$, $(\vec{\nabla}\rho)_x = \partial_x \rho$, donde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

   y use la ec. de conserv. de masa.

2. Considere las ecuaciones de gravito-hidrodinámica de primer orden

   $\partial_t \rho_1 + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 = 0$ **(a.1)**

   $\rho_0 \partial_t \vec{\mathbf{v}}_1 = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_1$ **(b.1)**

   $\vec{\nabla}^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1$ **(c.1).**

   Introduzca el Ansatz

   $\rho_1 = \rho_{\text{max}} e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)}$
   $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_{\text{max}} e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)}$
   $\Phi_1 = \Phi_{\text{max}} e^{i(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \omega t)}$

   en (a.1), (b.1), (c.1) y demuestre que se obtiene

   $\omega \rho_1 = \rho_0 \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1$ **(a1F)**

   $\omega \rho_0 \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{k}} c_s^2 \rho_1 + \vec{\mathbf{k}} \rho_0 \Phi_1$ **(b1F)**

$$\vec{\mathbf{k}}^2\Phi_1 = -4\pi G\rho_1 \qquad \textbf{(c1F)}$$

Sugerencia: si tiene dificultades con manejar el operador ∇, escriba las ecuaciones componente a componente usando coordenadas cartesianas. Por ejemplo, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$, $(\vec{\nabla}\rho)_x = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}$, $\rho = \rho_{\mathbf{max}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t}$.

3. Complete los pasos para derivar la ecuación de moméntum de MHD:

Paso A. Partiendo de la ecuación del moméntum de HD:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\mathbf{F}}$$

sustituya $\vec{\mathbf{F}} \to \vec{\mathbf{F}} + \dfrac{1}{\rho}\vec{\mathbf{j}}\times\vec{\mathbf{B}}$. Ahora sustituya $\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{j}}$. Quedará un término que contiene $(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{B}}$ que queremos escribir de forma diferente.

Paso B. Considere la identidad

$$\vec{\nabla}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}) = (\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathbf{B}} + (\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{B}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}).$$

Sustituya $\vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{B}}$ y simplifique. Ahora dele vuelta al producto cruz del último término para formar la expresión $(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{B}}$.

Paso C. Sustituya $(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})\times\vec{\mathbf{B}}$ por la expresión que encontró en el paso B y demuestre que queda

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\nabla}}{\mu_0\rho}\vec{\mathbf{B}}.$$