

Ejercicios

Espacios de funciones

1. Demuestre que para $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \neq n$, dos funciones cualesquiera pertenecientes al conjunto $\{x^n\}$ nunca son ortogonales en el intervalo $[0,1]$.
2. Considere el conjunto de funciones ortogonales $\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$, $x \in \mathbb{R}$ en el intervalo $[-1,1]$ (los primeros polinomios de Legendre). Calcule los primeros tres términos de la expansión de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\pi x)$ en la base de Legendre.
3. Considere el conjunto de funciones $\{f_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$, $\{e^{inx}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Demuestre que dos miembros cualesquiera de este conjunto de funciones son ortogonales en el intervalo $[0,2\pi]$ y calcule su normalización.
4. Considere el conjunto de funciones ortogonales $\{P_i(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$ ($x \in \mathbb{R}$, $i \in \{0,1,2\}$) en el intervalo $[-1,1]$ (los primeros polinomios de Legendre).
 - a) Escriba una representación matricial de la expansión obtenida en el problema 2.
 - b) Considere el operador $D := \frac{d}{dx}$. Calcule una representación matricial de este operador mediante el producto interno $D_{ij} = \langle P_i(x), DP_j(x) \rangle$, ($i, j \in \{0,1,2\}$).