Universidad de Costa Rica — Escuela de Física — Mecánica Celeste
Andrë Oliva — I–2014

Elementos Orbitales

1. Posición en órbitas elípticas. Las integrales de áreas y de *vis viva* (energía) para una órbita elíptica son

$$r^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k\sqrt{(1+m)a(1-e^2)} \tag{1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{2}$$

donde a es el semieje mayor, v es la *anomalía verdadera*, es decir, el ángulo polar de la órbita. Eliminando $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ de la [Ec. 2] a partir de la [Ec. 1], se obtiene

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)a(1-e^2)}{r^2} = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

Ahora, sea n la rapidez angular media del cuerpo en su órbita, definida mediante la tercera ley de Kepler (P es el periodo)

$$n = \frac{2\pi}{P} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} \tag{4}$$

Despejando $k\sqrt{1+m}$ de las [Ec. 4] y [Ec. 3], se obtiene la ecuación diferencial

$$n\,dt = \frac{r}{a}\frac{dr}{\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} \tag{5}$$

Ahora, definimos el siguiente cambio de variables:

$$a - r = ae\cos E \implies r = a(1 - e\cos E) \tag{6}$$

El ángulo E se llama *anomalía excéntrica*, y este cambio de variables implica en realidad una traslación del origen desde el foco de la elipse (lugar donde se encuentra el cuerpo más masivo), al centro de la misma.

Ahora, sustituyendo

$$n\,dt = dr\frac{1 - e\cos E}{\sqrt{a^2e^2 - a^2e^2\cos^2 E}} = dr\frac{1 - e\cos E}{ae\sin E} = (1 - \cos E)dE \tag{7}$$

lo cual, haciendo la integración, queda

$$n(t - T) = M = E - e\sin E \tag{8}$$

donde hemos definido el ángulo M, la *anomalía media*, que indica el desplazamiento angular que habría descrito el radio vector si se hubiera movido uniformemente con la rapidez angular media n. En otras palabras, hemos proyectado la órbita elíptica en una órbita circular. A la [Ec. 8] se le llama *ecuación de Kepler*, y es trascendental en E.

A partir de la [Ec. 5] y la ecuación de la elipse en coordenadas polares, $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$, aparece la relación

$$1 - e\cos E = \frac{1-e^2}{1+e\cos v} \implies e\cos v = \frac{1-e^2}{1-e\cos E} - 1$$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \tag{9}$$

Y a partir de aquí,

$$1 + \cos v = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E} \tag{10}$$

$$1 - \cos v = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E} \tag{11}$$

Con las que se obtiene, usando la fórmula de la tangente del ángulo medio,

$$\sqrt{\frac{1-\cos v}{1+\cos v}} = \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \tag{12}$$

2. Posición en órbitas hiperbólicas. La determinación de la posición en órbitas hiperbólicas guarda una estrecha analogía con la sección anterior. De la ecuación polar de la hipérbola[1],

$$r = \frac{a(\epsilon^2-1)}{1+\epsilon\cos v} \tag{13}$$

Las integrales del movimiento de áreas y *vis viva* (moméntum angular y energía) son

$$r^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k\sqrt{(1+m)a(1-\epsilon^2)} \tag{14}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = k^2(1+m)\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right) \tag{15}$$

Ahora, al eliminar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ de estas ecuaciones sustituyendo la primera en la segunda, se obtiene que

$$a\nu\,dt = \frac{rdr}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2\epsilon^2}} \tag{16}$$

donde $\nu = \dfrac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$. Aunque [Ec. 16] puede ser integrada en términos de funciones hiperbólicas directamente, es preferible introducir una cantidad auxiliar F que corresponde a la anomalía excéntrica en las órbitas elípticas. Hagamos

$$a + r = \frac{a\epsilon}{2}(e^F + e^{-F}) = a\epsilon\cosh F \tag{17}$$

[1] La excentricidad es ahora mayor que 1, por lo que surgen cambios de signo para que r siga siendo positivo. Por eso se usa ahora el símbolo ϵ, para recordar que ahora $\epsilon > 1$.

Entonces,

$$\nu\, dt = [-1 + \epsilon \cosh F] dF \implies M = \nu(t - T) = -F + \epsilon \sinh F \tag{18}$$

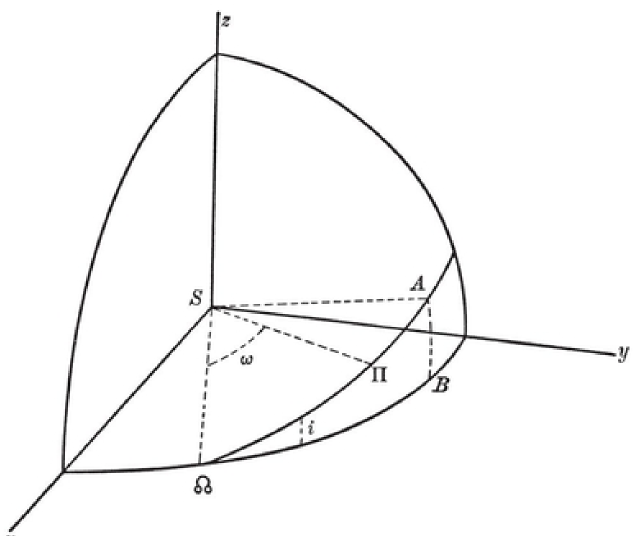
que sería un equivalente de la ecuación de Kepler para órbitas hiperbólicas. Entonces, en analogía con [Ec. 9] podemos encontrar

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 + \epsilon \cos v} = a[-1 + \epsilon \cosh F] \tag{19}$$

y, de aquí, encontramos un análogo a [Ec. 12],

$$\tanh \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}} \tanh \frac{F}{2} \tag{20}$$

3. Posiciones en el sistema heliocéntrico. En la siguiente figura se muestran las variables de una órbita elíptica general proyectada en la esfera celeste.



El problema general de dos cuerpos es de sexto orden, por lo que hay seis constantes de integración, que pueden ser elegidas arbitrariamente. En observaciones, entonces, conviene elegir las constantes siguientes:

- e : excentricidad de la órbita (ya definida más arriba)
- ☊: longitud del nodo ascendente, ángulo en el cual se encuentran el plano de la órbita y el de la eclíptica, cuando va de sur a norte.
- i : inclinación del plano de la órbita con respecto al plano de la eclíptica.
- ω : longitud del perihelio medida desde el nodo ascendente.

- T : tiempo de pasaje del perihelio.

En el plano de la órbita, entonces, definiendo el eje x positivo en la dirección del punto del perihelio,

$$\begin{cases} x_0 = r\cos v \\ y_0 = r\sin v \\ z_0 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Ahora, podemos rotar el eje x de forma que coincida con la línea de nodos, con lo que las ecuaciones anteriores quedan

$$\begin{cases} x = r\cos(v+\omega) = r\cos(v+\pi-\Omega) \\ y = r\sin(v+\omega) = r\sin(v+\pi-\Omega) \\ z = 0 \end{cases} \tag{22}$$

por comodidad, elegimos un nuevo parámetro, $u = v + \omega$, el *argumento de Latitud*.

En seguida, rotamos el sistema de coordenadas de forma que ahora sí el eje x coincida con la línea de nodos, y el eje y esté en el plano de la eclíptica. Las nuevas coordenadas son

$$\begin{cases} x' = r\cos u \\ y' = r\sin u\cos i \\ z' = r\sin u\sin i \end{cases} \tag{23}$$

Aunque también, al ser coordenadas esféricas, en términos de la latitud b y la longitud l,

$$\begin{cases} x' = r\cos b\cos(l-\Omega) \\ y' = r\cos b\sin(l-\Omega) \\ z' = r\sin b \end{cases} \tag{24}$$

Comparando [Ec. 23] y [Ec. 24],

$$\begin{cases} \cos b\cos(l-\Omega) = \cos u \\ \cos b\sin(l-\Omega) = \sin u\cos i \\ \sin b = \sin u\sin i \end{cases} \tag{25}$$

y finalmente,

$$\begin{cases} \tan(l-\Omega) = \tan u\cos i \\ \tan b = \tan i\sin(l-\Omega) \end{cases} \tag{26}$$

Esta ecuación nos permite calcular la longitud y latitud cuando se conocen Ω, i y u. Recapitulando, u contiene la información de en qué momento de la órbita se encuentra el objeto, y u y Ω dan la ubicación del plano de la órbita. Para objetos distantes, el conocimiento de la latitud y longitud es suficiente; solo bastaría una rotación para transformar la latitud y longitud en declinación (δ) y ascención recta (α), porque b y l están en el sistema eclíptico, que, debido a la inclinación terrestre de $\sim 23.5°$, se encuentra rotado con respecto al sistema ecuatorial, de uso común en los telescopios. No obstante, para los cuerpos cercanos a la Tierra, esta aproximación no es válida y hay que calcular las coordenadas *geocéntricas*, es decir, hay que efectuar una traslación también.

4. Determinación de órbitas. Con el análisis anterior entonces es posible calcular la ascención recta y la declinación de los puntos de una órbita. Ahora bien, surge la pregunta de cómo determinar los parámetros de una órbita a partir de observaciones hechas con instrumentos. Aunque el tema no se tratará en el presente trabajo, se dejará esbozado y con la referencia de dónde encontrarlo listo para calcular. Primero, se necesitan tres observaciones. La razón de esto es que al tener tres observaciones de una misma órbita, se obtendrían seis ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \varphi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_1) \\ \alpha_2 = \varphi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_2) \\ \alpha_3 = \varphi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_3) \\ \delta_1 = \psi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_1) \\ \delta_2 = \psi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_2) \\ \delta_3 = \psi(\text{☊}, i\omega, a, e, T; t_3) \end{cases} \tag{27}$$

y al ser seis parámetros, las ecuaciones los determinarán. Ahora bien, las relaciones φ y ψ no son sencillas, y de hecho se trata de ecuaciones trascendentales en general. Otra forma de determinar la órbita es conociendo la posición y velocidad en un instante dado, mediante lo cual tendríamos seis cantidades conocidas, y habría que encontrar la relación con los seis parámetros. Hay varios métodos para resolver este problema, dos de los cuales son el *método de Gauss* y el *método de Laplace*. Ambos involucran aproximaciones. Una descripción bastante completa de ambos métodos se encuentra en el capítulo 6 de Moulton (1970).

5. Referencia.

Moulton, Forest Ray (1970). *An Introduction to Celestial Mechanics*, Dover Publications. ISBN 9780486140681.