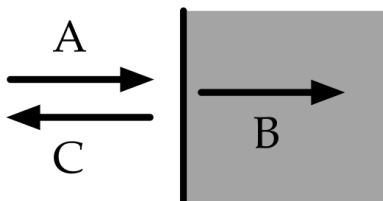


# Ejercicios de ondas electromagnéticas

André Oliva

II-2014 — Teoría Electromagnética (Prof. Marcela Hernández)  
Universidad de Costa Rica

## 1 Reflexión de una onda ante una superficie metálica



Consideremos una onda electromagnética de incidencia normal a una superficie plana de metal. El  ndice de refracción el coeficiente de extinción son

$$n = \kappa = \left( \frac{2\pi\sigma\mu}{\omega} \right)^{1/2} \gg 1$$

Queremos saber las amplitudes de las ondas reflejadas y penetrantes. Además, dado que la onda penetrante ejerce una fuerza  $\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{j} \times \vec{H} dV$ , queremos calcular la presión promedio en el tiempo que la onda ejerce sobre el material.

El medio 1 es vacío, con lo que  $\epsilon = \mu = 1$  en unidades gaussianas. Designamos con  $A$  la onda incidente,  $B$  la transmitida y con  $C$  la onda reflejada. Elegimos el eje  $z$  como la dirección de la onda incidente, por lo que el vector de onda es

$$\vec{k}_A = k\hat{e}_z = \frac{\omega}{c}\hat{e}_z$$

Para el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo  $\vec{H}$  tomamos entonces el Ansatz de ondas planas:

$$\vec{E}_A = A \exp(ikz - i\omega t)\hat{e}_x; \quad \vec{H}_A = A \exp(ikz - i\omega t)\hat{e}_y$$

Ambos campos est n relacionados por  $\vec{k} \times \vec{E} = (\omega/c)\vec{H}$ , con lo que, usando el sistema de unidades gaussiano, tenemos la ventaja de que las amplitudes son iguales. De forma similar, para la onda reflejada tenemos

$$\vec{k}_C = -k\hat{e}_z = -\frac{\omega}{c}\hat{e}_z$$

Los campos de la onda reflejada son, entonces

$$\vec{E}_C = C \exp(-ikz - i\omega t)\hat{e}_x; \quad \vec{H}_C = -C \exp(-ikz - i\omega t)\hat{e}_y$$

En el medio 2, en cambio, tenemos un índice de refracción y un coeficiente de extinción, con lo que el vector de onda queda

$$\vec{\mathbf{k}}_B = k_B \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa)\hat{\mathbf{e}}_z$$

dado que  $kc/\omega = n + ik$ . Entonces, las intensidades de la onda transmitida son

$$\vec{\mathbf{E}}_B = B \exp(ik_B z - i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x = B \exp\left(i\frac{\omega}{c}nz - i\omega t\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}kz\right) \hat{\mathbf{e}}_x$$

y, aplicando  $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{\mathbf{H}}$ ,

$$\vec{\mathbf{H}}_B = \frac{1}{\mu}(n + i\kappa)B \exp(ik_B z - i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y$$

Dado que las componentes tangenciales de  $\vec{\mathbf{E}}$  y  $\vec{\mathbf{H}}$  tienen que ser continuas, las amplitudes se relacionan en  $z = 0$  conforme a

$$\begin{cases} A + C = B \\ A - C = \frac{1}{\mu}(n + i\kappa)B \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones para  $B$  y  $C$  en términos de  $A$ . No obstante debemos tener en cuenta que  $n = \kappa \gg 1$ . Al resolver,

$$B = \frac{2A}{1 + \frac{1}{\mu}(n + i\kappa)} \approx \frac{2A\mu}{n(1 + i)}$$

Ahora usamos la relación

$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$$

con la que obtenemos

$$B = \left(\frac{\mu\omega}{\sigma\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) A$$

y eso significa que la onda transmitida tiene una fase diferente que la onda incidente, lo que es de esperar, para que pueda cumplir con las condiciones de frontera. Ahora usamos la otra ecuación del sistema para obtener la amplitud  $C$ :

$$A = C + \frac{1}{\mu}(n + i\kappa)B$$

sustituyendo  $B \approx 2A\mu/[n(1 + i)]$ ,

$$A \approx C + 2A \implies A \approx -C$$

que era lo que queríamos averiguar. La onda incidente y la reflejada tienen aproximadamente la misma amplitud, y forman un sistema de ondas estacionarias:

$$\vec{\mathbf{E}} = A(\exp(ikz) - \exp(-ikz)) \exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x = 2iA \sin(kz) \exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\vec{\mathbf{H}} = A(\exp(ikz) + \exp(-ikz)) \exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y = 2A \cos(kz) \exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y$$

y la onda penetrante,

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_B &= A \left( \frac{\mu\omega}{\sigma\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(i\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right)\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}\kappa z\right) \hat{\mathbf{e}}_x \\ \vec{\mathbf{H}}_B &= 2A \exp\left(i\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right)\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}\kappa z\right)\end{aligned}$$

Ahora, la fuerza podemos escribirla como

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{c} \int \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{H}} dV = \frac{1}{c} \int \sigma \vec{\mathbf{E}}_B \times \vec{\mathbf{H}}_B dV = \frac{\sigma}{c} \int_0^\infty E_{B_x}(z) H_{B_y}(z) dz \Delta F \hat{\mathbf{e}}_z$$

donde  $\Delta F$  es la superficie del metal. Para los campos, los únicos que cuentan son los de la onda penetrante, porque solo allí hay conductividad y corriente diferentes de cero. Entonces la presión ejercida por la onda es

$$p = \frac{\sigma}{c} \int_0^\infty E_{B_x} H_{B_y} dz$$

Ahora hay que considerar los promedios temporales de los campos

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_{B_x} &= \Re \left[ A \left( \frac{\mu\omega}{\sigma\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(i\frac{\omega}{c}(n + i\kappa)z - i\omega t\right) \right] \\ H_{B_y} &= \Re \left[ 2A \exp\left(i\frac{\omega}{c}(n + i\kappa)z - i\omega t\right) \right]\end{aligned}$$

El producto de las partes reales es

$$E_{B_x} H_{B_y} = 2A^2 \left( \frac{\mu\omega}{\sigma\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\omega}{c}\kappa z\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right)$$

Ahora, promediando los términos de coseno en el tiempo, obtenemos

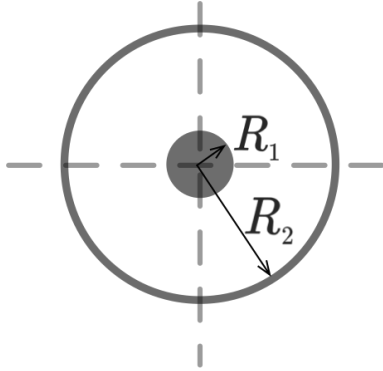
$$\frac{1}{t} \int_0^t \cos\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}nz - \omega t\right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

con lo que la presión promedio se vuelve

$$\bar{p} = \frac{|\vec{\mathbf{F}}|}{\Delta F} = \frac{\sigma}{c} 2A^2 \left( \frac{\mu\omega}{\sigma\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\omega}{c}\kappa z\right) dz = \frac{\sigma}{c} 2A^2 \left( \frac{\mu\omega}{\sigma\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c}{2\omega\kappa}$$

finalmente, sabiendo que  $\kappa = (2\pi\mu\sigma\omega^{-1})^{1/2}$  la presión es  $\bar{p} = A^2/(4\pi)$ , independiente de la naturaleza del material y la frecuencia de la onda.

## 2 Ondas TEM en un cable coaxial



Veremos la utilidad de los cables coaxiales al demostrar que pueden transmitir ondas TEM aparte de las TE y TM. Para las ondas TEM se cumple que

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c}; \quad \nabla_t^2 \vec{\mathbf{E}}_{\text{TEM}} = 0$$

y también, eligiendo  $z$  como la dirección de transmisión,

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{TEM}} = \sqrt{\mu\epsilon} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \vec{\mathbf{E}}_{\text{TEM}})$$

En lugar de resolver la ecuación de onda para  $\vec{\mathbf{E}}$ , vemos que el campo eléctrico se puede derivar de un potencial  $\phi$ , dado que  $\nabla_t \times \vec{\mathbf{E}}_t = 0$  en este tipo particular de onda. Resolvemos entonces la ecuación para  $\phi$

$$\nabla_t^2 \phi = 0$$

la cual, para coordenadas polares es

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \phi(\rho, \varphi) = 0$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(R_1, \varphi) = \phi_1; \quad \phi(R_2, \varphi) = \phi_2$$

que, al ser independientes de  $\varphi$ , el potencial no puede depender de  $\varphi$ . Entonces, la ecuación se simplifica bastante,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0$$

y su solución es

$$\phi(\rho) = A \ln \rho + B$$

Después de aplicar las condiciones de frontera encontramos que

$$A = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\ln R_1 - \ln R_2}; \quad B = \frac{\phi_2 \ln R_1 - \phi_1 \ln R_2}{\ln R_1 - \ln R_2}$$

Los campos quedan, entonces,

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{TEM}}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{A}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{TEM}}(\rho, \varphi, z, t) = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{A}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} e^{-i(\omega t - kz)}$$

Ahora bien, analicemos por qué no se pueden transmitir ondas TEM en un conductor hueco. Si quitamos  $R_2$ , es decir, si  $R_2 \rightarrow 0$ , podríamos determinar  $B$  con la condición de frontera  $\phi(R_1) = \phi_1$ , pero el potencial  $\phi(\rho/R_1) + \phi_1$  es divergente para  $\rho = 0$ , por lo que  $A \rightarrow 0$ .

### 3 Emisión de ondas electromagnéticas por una carga oscilante

Una carga  $q$  se mueve con movimiento armónico simple  $\vec{\mathbf{r}}'(t) = r_{\text{max}} \cos \omega t \hat{\mathbf{e}}_x$ . Utilizamos un potencial retardado sencillo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'(t - |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'(t)|/c)|}$$

para visualizar la radiación producida. De nuevo, reproducimos las partes del código más importantes:

```
from __future__ import division
from visual import *
from numpy import arange

rpxmax = 1/5
omega = 5
carga=1e-6
c = 1.1

def rp(t):
    return vector(rpxmax*cos(omega*t),0,0)

t = 0
dt = 0.0001
bola = sphere(radius=0.2,color=color.red)
puntos = []
for x in arange(-3,3,0.1):
    for y in arange(-3,3,0.1):
        if y == 0 and x>-rpxmax-1 and x<rpxmax+1:
            pass
        else:
            puntos.append(sphere(radius=0.05,pos=vector(x,y,0)))

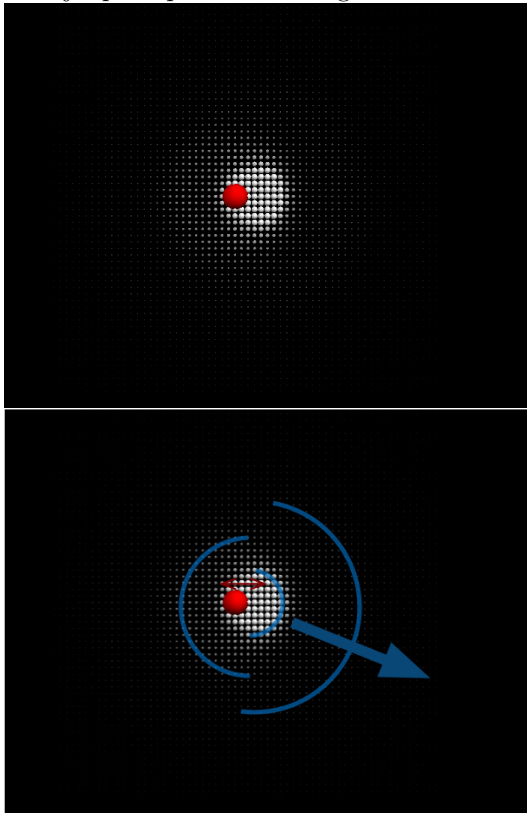
while True:
```

```

rate(40)
for punto in puntos:
    r = punto.pos - rp(t-mag(punto.pos-rp(t))/c)
    V = 2e4*carga/mag(r)
    if V > 0.05:
        V = 0.05
    punto.radius=V
    bola.pos = rp(t)
    t = t+dt

```

Básicamente, lo que hacemos es generar una grilla de pequeñas esferas en el plano  $x, y$ , ajustando el radio de cada esfera proporcional al potencial retardado en ese punto. Se genera también una esfera roja que representa la carga en movimiento.



Estos dos fotogramas muestran un momento en la emisión de ondas. Dado el poco contraste de la imagen, abajo resaltamos parte de los frentes de onda para que puedan visualizarse, así como la dirección de propagación de las ondas y la dirección de movimiento de la carga.

## 4 Referencias

- Greiner, W. (1998). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-387-94799-X
- Franklin, J. (2005). *Classical electromagnetism*. ISBN 0-8053-8733-1
- Korn, G.; Korn, T. (1968). *Mathematical handbook for scientists and engineers*. ISBN 0-486-41147-8
- Jackson, J. (1975). *Classical electrodynamics*. ISBN 0-471-43132-X
- Weber, H.; Arfken, G. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. ISBN 0-12-059877-9
- Para información sobre Python y VPython y una explicación más detallada sobre las simulaciones, <http://gandreoliva.url.ph/cursos.html>