

Modelo sencillo de la expansión del universo

André Oliva

Julio 2015

Problemas especiales de cosmología, Dr. rer. nat. Francisco Frutos Alfaro.
Universidad de Costa Rica.

1 Introducción

Un modelo sencillo ("est andar") de la expansión del universo desde sus órdenes será construido tomando como base que está compuesto por fotones de la radiación cósmica de microondas (CMB), bariones (materia común, la cual es un $\sim 75\%$ H y $\sim 24\%$ He), neutrinos, materia oscura fría (CDM) y energía oscura, en la forma de energía efectiva del vacío o constante cosmológica Λ . En la siguiente tabla se transcriben los valores estimados de la densidad de partículas (n_i) y de materia/energía, normalizada a una "densidad crítica" $\epsilon_c = 0.92h_{70}^2 \times 10^{-26} \text{ kgm}^{-3}$.

Especie	$n_i \text{ (m}^{-3}\text{)}$	$\Omega_i = \epsilon_i/\epsilon_c$
Fotones CMB	$n_\gamma = 4.11 \cdot 10^8$	$\Omega_\gamma = 5.06h_{70}^{-2} \cdot 10^{-5}$
ν_e, ν_μ, ν_τ	$n_\nu = 3 \times (3/11)n_\gamma$	$0.0004h_{70}^{-2} < \Omega_\nu < 0.015h_{70}^{-2}$
Bariones	$n_b = (6.18 \cdot 10^{-10})n_\gamma$	$\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0015$
CDM	?	$\Omega_{CDM} = 0.228 \pm 0.013$
Energía oscura	0	$\Omega_\Lambda = 0.726 \pm 0.015$

Otras constantes:

Tasa de expansión (constante de Hubble actual)	$H_0 = (70.5 \pm 1.3) \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$
Tiempo de expansión (tiempo de Hubble)	$t_H := H_0^{-1} = (13.87 \pm 0.25) \text{ Gyr}$
Distancia de Hubble	$d_H := c/H_0 = (4250 \pm 8) \text{ Mpc}$
h_{70}	$h_{70} := H_0/(70 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1})$ $= 1.01 \pm 0.02$

Por supuesto, como se ignora la naturaleza real de la materia oscura (i partícula?), su densidad de partículas n_{CDM} es simplemente desconocida. Los datos anteriores provienen del sat elite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) de la NASA, y del instrumento FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) del sat elite COBE (Cosmic Background Explorer).

2 Unidades

Vamos a utilizar unidades planckianas naturales, las cuales consisten en poner básicamente todas las constantes naturales relevantes igual a 1:

$$G = \hbar = c = K_B = 1$$

No solamente eso, sino que todas las cantidades físicas están adimensionalizadas. Utilizando nuestro *operador unidades*, eso significa que

$$\begin{aligned}\mathcal{U}[r] &= 1 && \text{(longitud)} \\ \mathcal{U}[t] &= 1 && \text{(tiempo)} \\ \mathcal{U}[m] &= 1 && \text{(masa)} \\ \mathcal{U}[T] &= 1 && \text{(temperatura)} \\ \mathcal{U}[Q] &= 1 && \text{(carga)} \\ \mathcal{U}[E] &= 1 && \text{(energía)}\end{aligned}$$

Lo que hacemos ahora es definir una transformación \mathfrak{F} entre símbolos de diferentes sistemas de unidades:

$$\mathfrak{F} : \{x, P\} \rightarrow \{x, SI\}$$

donde x es una cantidad física. Algunas de estas transformaciones son

$$\begin{aligned}\{r, P\} &= \frac{\{r, SI\}}{l_{pl}} \\ \{t, P\} &= \frac{\{t, SI\}}{t_{pl}} \\ \{m, P\} &= \frac{\{m, SI\}}{m_{pl}} \\ \{Q, P\} &= \frac{\{Q, SI\}}{q_{pl}} \\ \{E, P\} &= \frac{\{E, SI\}}{E_{pl}}\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}l_{pl} &= (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.616 \cdot 10^{-35} \text{ m} \\ m_{pl} &= (\hbar c/G) = 2.177 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \\ t_{pl} &= (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5.391 \cdot 10^{-44} \text{ s} \\ q_{pl} &= (4\pi\epsilon_0\hbar c)^{1/2} = 1.876 \cdot 10^{-18} \text{ C}\end{aligned}$$

Debido a la adimensionalización de las cantidades físicas en las unidades naturales, la densidad de energía es equivalente a la densidad de masa; el tiempo es equivalente a la longitud, el campo

eléctrico es equivalente al magnético, etc. Las unidades derivadas (área, densidad, volumen, etc.) se construyen con las unidades fundamentales.

Con estas unidades, las ecuaciones de Einstein quedan

$$R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta R = 8\pi T^\alpha{}_\beta \quad (2.1)$$

3 La métrica FLRW y las ecuaciones de Friedmann

La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) es

$$ds^2 = -B^2 dt^2 + \frac{A^2}{kr^2 + 1} dr^2 + r^2 A^2 d\theta^2 + r^2 A^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

y se obtiene de exigir propiedades de homogeneidad e isotropía al espacio-tiempo. $A = A(t)$, $B = B(t)$, aunque en nuestro modelo sencillo, $B = 1$. La constante k representa la curvatura del espacio; $k \in \{-1, 0, +1\}$. Las coordenadas son *comóviles*, es decir que las posiciones de dos partículas no cambian en el tiempo en estas coordenadas, sino que es el espacio entre ellas el que se expande y se toma en cuenta mediante la función A , llamada *factor de escala*. Hay que sustituir esta métrica en las ecuaciones de Einstein para determinar la forma del factor de escala, y dice si el universo se contrae o se expande dependiendo del contenido del tensor de energía-momento. La sustitución de la métrica en las ecuaciones de Einstein es un proceso largo y trabajoso, por lo que decidimos calcularlo con ayuda de un sistema algebraico computacional.

3.1 Programa en Sage y objetificación del problema

Sage es una suite integrada de paquetes de software libre para cálculos algebraicos y numéricos. La integración de los paquetes se da en Python, y la programación en Sage es casi idéntica a la de Python. Con esto, es posible atacar el problema de forma orientada a objetos. Hay varios problemas que surgen al objetificar el problema, como el tratamiento de los tensores.

El camino que tomamos en el script `FRW.sage` es el siguiente:

- El espacio-tiempo es un objeto que contiene un tensor llamado *métrica*.
- Los tensores de rango 1 se tratan como vectores, los de rango 2, como matrices, y los de rango 3 como diccionarios, es decir, objetos indexados.
- Una conexión (símbolo de Christoffel) es un objeto que se trata como tensor aunque no lo sea.
- Un tensor, al crearse, debe tener una base para cada componente. La base se especifica con dos objetos, `tangent()` y `oneForm()`, y de esa manera se especifica si un índice es contravariante o covariante. Esta distinción es meramente nominal, por el momento, aunque podría ser de utilidad práctica.
- Hay funciones que calculan la conexión, el tensor de curvatura, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura a partir del objeto métrica que pertenece al objeto espacio-tiempo.

A continuación, la parte de inicialización del script, donde se puede dar una idea de cómo funciona:

```

var('t,r,theta,phi,k') # creación de las variables
variables = [t,r,theta,phi] # lista que contiene las variables en orden
A = function('A',t) # A y B son funciones del tiempo
B = function('B',t)

rw = SpaceTime() # objeto espacio-tiempo
rw.metric = Tensor([oneForm(),oneForm()],4)
# la métrica es un tensor de dimensión 4,
# de dos índices contravariantes

# componentes de la métrica
rw.metric[0,0] = -B^2
rw.metric[1,1] = A^2/(1+k*r^2)
rw.metric[2,2] = A^2*r^2
rw.metric[3,3] = A^2*r^2*(sin(theta))^2

# definición de los tensores
rw.conn = Tensor([tangent(),oneForm(),oneForm()],4)
rw.crv = Tensor([tangent(),oneForm(),oneForm(),oneForm()],4)
rw.ric = Tensor([oneForm(),oneForm()],4)

# cálculo de los símbolos de Christoffel y definición de la conexión del espacio-tiempo
christoffel(rw.conn,rw.metric,variables)

# cálculo del tensor de Riemann y almacenamiento en el espacio-tiempo
riemann(rw.crv,rw.conn,variables)

# cálculo del tensor de Ricci y almacenamiento en el espacio-tiempo
ricci(rw.ric,rw.crv,variables)

# cálculo del escalar de curvatura y almacenamiento en el espacio-tiempo
rw.cs = curvScalar(rw.ric, rw.metric)

```

Una vez concluido el cálculo de los tensores, se procede al formateo del resultado en código \LaTeX que pueda ser utilizado posteriormente.

3.2 Resultados

Transcribimos los resultados de la ejecución del script que son relevantes para la obtención de las ecuaciones de Friedmann. El tensor de Ricci tiene componentes no nulas

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\frac{3\left(B(t)\frac{d^2A}{dt^2} - \frac{dA}{dt}\frac{dB}{dt}\right)}{A(t)B(t)} \\
 R_{11} &= -\frac{2kB(t)^3 - 2B(t)\frac{dA^2}{dt} - A(t)B(t)\frac{d^2A}{dt^2} + A(t)\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dt}}{(kr^2 + 1)B(t)^3} \\
 R_{22} &= -\frac{2kr^2B(t)^3 - 2r^2B(t)\frac{dA^2}{dt} - r^2A(t)B(t)\frac{d^2A}{dt^2} + r^2A(t)\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dt}}{B(t)^3} \\
 R_{33} &= -\frac{\left(2kr^2B(t)^3 - 2r^2B(t)\frac{dA^2}{dt} - r^2A(t)B(t)\frac{d^2A}{dt^2} + r^2A(t)\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dt}\right)\sin(\theta)^2}{B(t)^3}
 \end{aligned}$$

El escalar de curvatura, por otro lado, es

$$R = -\frac{6\left(kB(t)^3 - B(t)\frac{dA^2}{dt} - A(t)B(t)\frac{d^2A}{dt^2} + A(t)\frac{dA}{dt}\frac{dB}{dt}\right)}{A(t)^2B(t)^3}$$

3.3 Tensor de energía-momento

En un marco de referencia comóvil como el de la métrica FLRW (3.1), el tensor de energía-momento que representa un fluido perfecto caracterizado por una densidad de energía ϵ , presión p y tetra-velocidad u^α es

$$T_\beta^\alpha = (\epsilon + p)u^\alpha u_\beta + \delta_\beta^\alpha p$$

Esta tetra-velocidad está expresada en un marco local, por lo que el tensor caracteriza localmente el fluido. El universo puede modelarse como un fluido perfecto, isotrópico y homogéneo a escalas mayores a los 100 MPc.

Ahora tomaremos las ecuaciones de Einstein (2.1) y multiplicando a ambos lados por la métrica *local comóvil* y sumando en los índices repetidos,

$$\left(\begin{matrix} g \\ comov. \end{matrix}\right)_{\gamma\alpha} (R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta R = 8\pi T^\alpha_\beta)$$

cambiando índices mudos,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Ahora, para el tensor de energía-momento, vamos a calcular las componentes. La velocidad comóvil de un fluido estático es

$$(u^\mu) = (1, 0, 0, 0)^T$$

La métrica comóvil es

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$(u_\nu) = (g_{\nu\rho}u^\rho) = (-1, 0, 0, 0)$$

con lo que

$$u^0 u_0 = -1$$

ahora,

$$T_0^0 = -(p + \epsilon) + p = -\epsilon$$

$$T_i^i = (p + \epsilon)u^i u_i + p = p$$

con lo que el tensor queda

$$(T_\beta^\alpha) = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

3.4 Formación de las ecuaciones de Friedmann

Apliquemos para los índices 0,0 las ecuaciones de Einstein (3.2):

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi T_{00}$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi T_0^0 g_{00}$$

sustituimos $T_{00} = -\epsilon$, $g_{00} = -1$, el tensor de Ricci con $B = 0$:

$$R_{00} = \frac{-3}{A} \frac{d^2 A}{dt^2}$$

y el escalar de curvatura con $B = 0$

$$R = -\frac{6}{A^2} \left(k - \left(\frac{dA}{dt} \right)^2 - A \frac{d^2 A}{dt^2} \right)$$

y queda

$$\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{k}{A^2} = \frac{8\pi\epsilon}{3} \quad (3.3)$$

donde el punto es derivada respecto a t . Esta es una de las ecuaciones de Friedmann. Similarmente, con los índices 1,1,

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 8\pi T_1^1 g_{11}$$

sustituimos $T_1^1 = p$, $g_{11} = 1$, y el tensor de Ricci

$$R_{11} = \frac{-2k + 2\dot{A}^2 + A\ddot{A}}{(kr^2 + 1)}$$

y queda, después de simplificar,

$$-2A\ddot{A} + k - \dot{A}^2 = 8\pi p A^2 \quad (3.4)$$

Ahora tomamos (3.3), despejamos \dot{A}^2 y sustituimos en (3.4). Obtenemos

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{4\pi}{3}(\epsilon + 3p) \quad (3.5)$$

que es la segunda ecuación de Friedmann, llamada la *ecuación de aceleración*. Podemos relacionar la presión con la densidad mediante la ecuación de estado

$$p = \omega\epsilon$$

donde $\omega = 0$ para la materia (se considera como "polvo"), $\omega = -1$ para la materia oscura, y $\omega = 1/3$ para la radiación.

4 Solución numérica

Vamos a tomar la primera ecuación de Friedmann, (3.5) (llamada *la* ecuación de Friedmann) y resolverla numéricamente. Primero que nada, vamos a sustituir $k \rightarrow -\kappa$ para que concuerde con la literatura ($\kappa = -1$ para un universo "abierto", $\kappa = 0$ para un universo "plano" y $\kappa = +1$ para un universo "cerrado")

$$\dot{A}^2 = \frac{8\pi}{3}\epsilon A^2 - \kappa$$

ahora sustituimos la densidad de materia separada en componentes como

$$\epsilon = \epsilon_M + \epsilon_\Lambda + \epsilon_R$$

donde $\epsilon_M = \epsilon_\nu + \epsilon_b + \epsilon_{CDM}$, es decir, la densidad de materia atractiva, ϵ_R es la densidad de radiación y ϵ_Λ es la densidad de energía oscura.

Con esto, la ecuación de Friedmann queda

$$\dot{A}^2 = \frac{8\pi}{3}(\epsilon_M + \epsilon_R + \epsilon_\Lambda)A^2 - \kappa \quad (4.1)$$

4.1 Densidades

Ahora debemos ver cada uno de los términos de las densidades, puesto que cada término depende del tiempo. La densidad de masa es inversamente proporcional al factor de escala ("tamaño" del universo):

$$\epsilon_M = \frac{m}{V} \propto \frac{1}{A^3}$$

La densidad de radiación es inversamente proporcional a la cuarta potencia del factor de escala. Para ver esto, pensemos en la densidad de energía contenida en un volumen V : cada fotón tiene una energía $h\nu$:

$$\epsilon_R = \frac{Nh\nu}{V} = \frac{Nhc}{\lambda V} \propto \frac{1}{A^4}$$

Suponemos que la densidad de energía oscura es constante en el tiempo. Con esto, podemos relacionar los valores actuales de la densidad de energía con sus valores en función del tiempo:

$$\epsilon_M(t) = \epsilon_{M0} \left(\frac{A_0}{A(t)} \right)^3$$

$$\epsilon_R(t) = \epsilon_{R0} \left(\frac{A_0}{A(t)} \right)^4$$

con esto, (4.1) queda

$$\dot{A}^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\epsilon_{M0} \frac{A_0^3}{A^3} + \epsilon_{R0} \frac{A_0^4}{A^4} + \epsilon_\Lambda \right) A^2 - \kappa \quad (4.2)$$

Vamos a poner todo en términos de los parámetros de densidad Ω que describimos en la sección 1. Empezamos con (4.2). Hacemos la sustitución

$$\tilde{a} = \frac{A}{A_0}; \quad t = \frac{\tilde{t}}{H_0}$$

lo que implica que

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{dA}{dt} \frac{1}{A_0}; \quad dt = \frac{d\tilde{t}}{H_0}$$

por la regla de la cadena,

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \frac{dA}{dt} \frac{1}{A_0 H_0} \implies \frac{dA}{dt} = A_0 H_0 \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$$

aplicando estas transformaciones, queda

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_{M0}}{H_0^2} \frac{1}{\tilde{a}^3} + \frac{\epsilon_{R0}}{H_0^2} \frac{1}{\tilde{a}^4} + \epsilon_\Lambda \right) \tilde{a}^2 - \frac{\kappa}{h_0^2 A_0^2}$$

Al término $3H_0^2/(8\pi)$ se le llama *densidad crítica* ϵ_c :

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 = (\Omega_{M0} \tilde{a}^{-3} + \Omega_{R0} \tilde{a}^{-4} + \Omega_\Lambda) \tilde{a}^2 - \frac{\kappa}{H_0^2 A_0^2}$$

Para facilitar la computación numérica, vamos a hacer el cambio de variable

$$u = \frac{1}{\tilde{a}}; \quad \implies du = -\frac{1}{\tilde{a}^2} d\tilde{a}$$

y vamos a redefinir el punto, de forma que $\dot{} = d/d\tilde{t}$. Entonces, multiplicando a ambos lados \tilde{a}^{-2} y sustituyendo,

$$\dot{u}^2 = (\Omega_{M0}u^3 + \Omega_{R0}u^4 + \Omega_{\Lambda})u^2 - \frac{\kappa}{H_0^2 A_0^2}u^4 \quad (4.3)$$

Tenemos que manejar ese último término, pues no conocemos A_0 . Para ello, devolvámonos un paso, es decir, sin sustituir u , vemos que

$$\frac{1}{\tilde{a}^2} \left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 = \Omega_{M0}\tilde{a}^{-3} + \Omega_{R0}\tilde{a}^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k\tilde{a}^{-2} \quad (4.4)$$

donde $\Omega_k := -\kappa/(H_0^2 A_0^2)$. Ahora bien, sabemos que

$$H(t) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = H_0 \frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}$$

con lo que

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{M0}\tilde{a}^{-3} + \Omega_{R0}\tilde{a}^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k\tilde{a}^{-2}$$

Evaluemos esta ecuación en el tiempo presente, $\tilde{t} = 1$, para obtener

$$1 = \Omega_{M0} + \Omega_{R0} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k$$

si llamamos $\Omega = \Omega_{M0} + \Omega_{R0} + \Omega_{\Lambda}$, observamos que

$$\Omega_k = 1 - \Omega$$

Según un análisis de los datos de la secc. 1, $\Omega = 1.00 \pm 0.02$, con lo que

$$\Omega_k = \begin{cases} -0.02 \\ 0 \\ +0.02 \end{cases}$$

dependiendo si la curvatura es positiva, cero o negativa, respectivamente.

Con esto, obtenemos finalmente la ecuación diferencial

$$\dot{u}^2 = (\Omega_{M0}u^3 + \Omega_{R0}u^4 + \Omega_{\Lambda})u^2 + \Omega_k u^4 \quad (4.5)$$

4.2 Programa en Python

Utilizamos el módulo `matplotlib` para graficar una solución numérica a la ecuación diferencial (4.5). Nos interesa su comportamiento cualitativo, por lo que vamos simplemente a usar el método de Euler para su solución. Explicaremos cada bloque de código a continuación.

Importación de las librerías necesarias

```
from __future__ import division
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
```

Almacenamos los resultados del cálculo numérico en dos listas de listas, `u11` y `t11`. Contienen tres listas vacías para hacer curvatura positiva, cero y negativa.

```
u11=[[], [], []]
t11=[[], [], []]
```

Valores de los parámetros adimensionales de densidad

```
OmegaDE=0.73
OmegaM=0.27 #Omegab+Omeganu+OmegaCDM
OmegaR=5e-5
Omegak1=[-0.02,0,0.02]
```

Definición del lado derecho de (4.5)

```
def f(u,t):
    return -sqrt(8*pi/3*(OmegaM*u**3+OmegaR*u**4+OmegaDE)*u**2- Omegak*u**4)
```

Para cada valor de la curvatura se resuelve la ecuación diferencial. Como la condición es de frontera y no inicial, tenemos que resolver la ecuación dos veces: una hacia atrás en el tiempo, y la otra, hacia adelante en el tiempo, para que cumplan que $u(t = 1) = 1$.

```
for Omegak in Omegak1:
    i = Omegak1.index(Omegak)
    u=1
    t=1
    dt=-0.01

    # hacia atrás en el tiempo
    while t>0.6:
        t11[i].append(t)
        u += f(u,t)*dt
        u11[i].append(1/u) # lo que queremos graficar es el factor de escala a=1/u
        t += dt

    # la lista se reversa para obtener el orden correcto en la gráfica
    t11[i]=list(reversed(t11[i]))
    u11[i]=list(reversed(u11[i]))

    u=1
    t=1
    dt=0.01

    # hacia adelante en el tiempo
    while t<1.5 and t>=1:
        t11[i].append(t)
        u += f(u,t)*dt
```

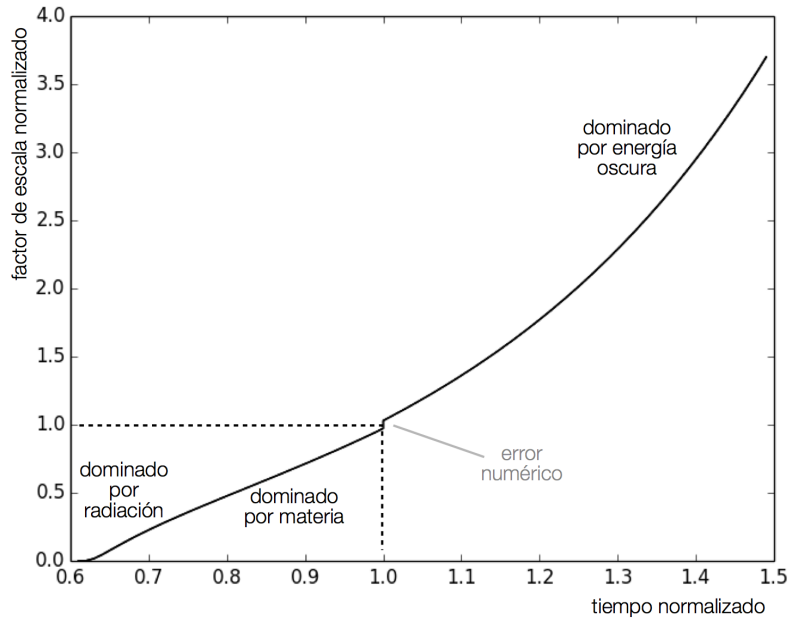


Figure 5.1: Resultado de la solución para los valores medidos del universo actual

```
ull[i].append(1/u)
t += dt
```

Graficación

```
for Omegak in Omegakl:
    i = Omegakl.index(Omegak)
    plt.plot(tll[i],ull[i], 'k-')

plt.show()
```

5 Resultados y discusión

En la fig. 5.1 se muestra una gráfica anotada generada por el script de la sección anterior. Se muestran los puntos generados unidos por líneas rectas, es decir, se ha hecho una interpolación lineal de los datos. Las unidades están normalizadas de forma que el factor de escala al inicio, cuando el tiempo es cero, debería ser cero, y el tiempo y el factor de escala actuales son 1. Lo primero que llama la atención es un pequeño "brinco" en el momento actual, totalmente atribuible

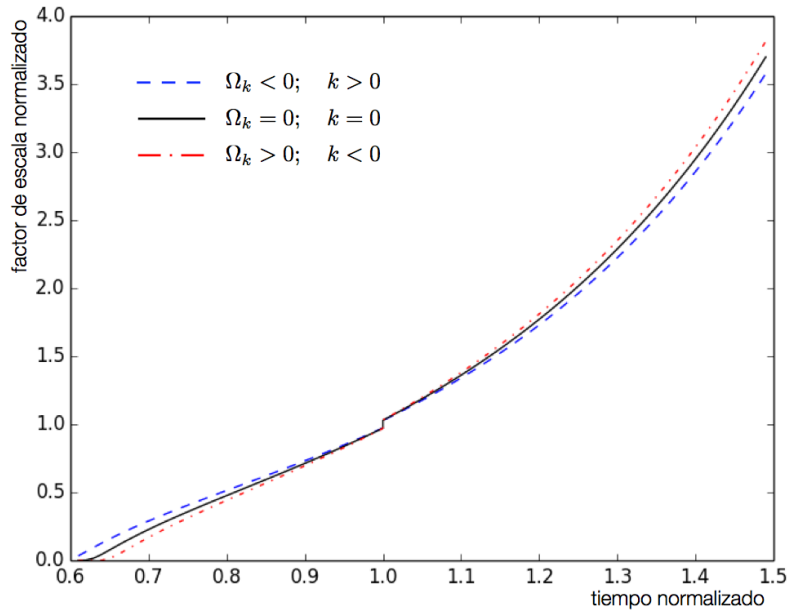


Figure 5.2: Exageración de la curvatura

al método numérico tan simple que hemos utilizado, pues el proceso de solución queda dividido en dos partes.

En la gráfica están, de hecho, los tres valores de la curvatura. Al ser tan cercanos uno de otro, no hay diferencia notoria.

Vemos que el universo tiene una etapa inicial de expansión dominada por el término $\propto a^{-4}$ de la radiación, que rápidamente cae y toma su lugar el término de la materia $\propto a^{-3}$. El universo parece desacelerar su expansión, puesto que la gráfica muestra una pendiente cada vez más suave. La expansión debería detenerse y empezar a revertirse de no ser por la energía oscura, que, según la gráfica, en el futuro comienza a dominar la expansión del universo, acelerándola. Este era el *modelo estándar* de la cosmología previo a la propuesta de la *inflación*, y contiene algunas predicciones cualitativas acertadas, pero también tiene problemas, especialmente con respecto a las condiciones iniciales del universo. El *modelo inflacionario* viene a resolver algunos de estos problemas.

5.1 Efecto de la curvatura

Como lo discutimos antes, la curvatura actual del universo es prácticamente cero, por lo que en nuestra gráfica 5.1 no se aprecia ninguna diferencia. Para poder ver la diferencia, vamos a exagerar grandemente el efecto de la curvatura poniendo $\Omega_{k1} = [-1, 0, 1]$. El resultado está en la fig. 5.2, y en él se puede ver la diferencia en la evolución según la curvatura.

Referencias

- Koberlein, Brian; Meisel, David (2013). *Astrophysics through Computation*. Cambridge University Press. Secc. 9.7.3–9.7.4.
- Rich, James (2009). *Fundamentals of Cosmology*. Springer. Páginas 1-3.
- Mukhanov, Viatcheslav (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press. Secc. 1.1–1.3.6.